

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

Предисловие	5
Введение	7
Глава 1. Основные характеристики звеньев автоматических систем	15
§ 1.1. Уравнения звеньев и виды основных характеристик	15
§ 1.2. Типы позиционных звеньев и их характеристики	25
§ 1.3. Типы интегрирующих и дифференцирующих звеньев и их характеристики	34
§ 1.4. Другие типы звеньев	41
Глава 2. Основные характеристики систем автоматического управления	44
§ 2.1. Передаточные функции и характеристики разомкнутой цепи звеньев	44
§ 2.2. Структурные преобразования	50
§ 2.3. Передаточные функции и уравнения замкнутой системы	54
§ 2.4. Частотные характеристики замкнутой системы	59
Глава 3. Точность и чувствительность систем автоматического управления	64
§ 3.1. Процесс управления и требования к нему	64
§ 3.2. Постоянные ошибки. Астатические системы	67
§ 3.3. Точность при гармоническом воздействии	72
§ 3.4. Установившаяся ошибка при произвольном воздействии (коэффициенты ошибок)	75
§ 3.5. Чувствительность автоматических систем	79
Глава 4. Устойчивость систем автоматического управления	84
§ 4.1. Понятие устойчивости линеаризованных систем	84
§ 4.2. Алгебраические критерии устойчивости	90
§ 4.3. Критерий устойчивости Михайлова. Построение областей устойчивости	95
§ 4.4. Частотный критерий устойчивости Найквиста	102
Глава 5. Оценки качества переходного процесса	111
§ 5.1. Требования качества и связь с частотными характеристиками	111
§ 5.2. Частотные оценки качества	115
§ 5.3. Корневые оценки качества	119
§ 5.4. Интегральные оценки качества	126
Глава 6. Корректирующие устройства и методы их синтеза	129
§ 6.1. Последовательные корректирующие устройства	129
§ 6.2. Параллельные корректирующие устройства	134

§ 6.3. Корректирующие устройства по внешнему воздействию. Инвариантность	139
§ 6.4. Частотный метод синтеза корректирующих устройств	142
§ 6.5. Метод корневого годографа	150
Глава 7. Метод пространства состояний в теории управления	158
§ 7.1. Уравнения системы и ее коррекция в пространстве состояний	158
§ 7.2. Прямой корневой метод синтеза систем управления доминантного типа	166
§ 7.3. Примеры прямого корневого метода синтеза другого типа	175
§ 7.4. Программа корневого метода синтеза корректирующих цепей	179
Глава 8. Многомерные системы. Управляемость и наблюдаемость	189
§ 8.1. Особенности многомерных систем автоматического управления	189
§ 8.2. Исследование многомерных систем	199
§ 8.3. Частотные методы для многомерных систем	206
§ 8.4. Понятие управляемости и наблюдаемости систем	215
§ 8.5. Оценивание координат состояния систем	221
Глава 9. Линейные системы автоматического управления других типов	226
§ 9.1. Системы с запаздыванием	226
§ 9.2. Системы с распределенными параметрами	233
§ 9.3. Системы с переменными параметрами	236
§ 9.4. Дискретные системы	242
Глава 10. Импульсные системы автоматического управления	247
§ 10.1. Уравнения и передаточные функции	247
§ 10.2. Частотные характеристики импульсных систем	255
§ 10.3. Логарифмические частотные характеристики	263
§ 10.4. Устойчивость импульсных систем	268
§ 10.5. Точность и коррекция импульсных систем	275
Приложение 1. Текст программы корневого метода синтеза корректирующих цепей	286
Приложение 2. Представление исходных данных для примера § 7.4.	297
Приложение 3. Результаты расчета примера § 7.4.	298
Список литературы	300

Е. П. ПОПОВ

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

2-е ИЗДАНИЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия
для студентов высших технических учебных заведений*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989



ББК 32.965.4

П58

УДК 519.71(075.9)

Попов Е. П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления: Учеб. пособие для вузов.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— 304 с.— ISBN 5-02-014112-7.

Соответствует программе семестрового курса лекций по линейной теории автоматического управления и регулирования. Содержит вводные понятия, основные характеристики различных звеньев систем автоматического управления, передаточные функции и частотные характеристики разомкнутых и замкнутых систем.

Исследуется точность автоматических систем при различных внешних воздействиях. Даются критерии устойчивости, оценки качества переходных процессов, частотные и корневые методы синтеза корректирующих устройств. Оцениваются основные виды этих устройств. Излагается метод пространства состояний в теории управления. Дается понятие управляемости и наблюдаемости систем. Кратко определяется чувствительность систем. Даются основные понятия о многомерных системах. Рассматриваются импульсные системы.

1-е изд.— 1978 г.

Для студентов вузов, а также инженеров.

Ил. 241. Библиогр. 46 назв.

Рецензент

доктор технических наук Г. Н. Лебедев

П 1402060000—042
053(02)-89 157-89

© Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1978;
с изменениями, 1989

ISBN 5-02-014112-7

Теория автоматического управления является в настоящее время одной из важнейших технических наук общего применения. Она дает основную теоретическую базу для исследования и проектирования любых автоматических и автоматизированных систем во всех областях техники и народного хозяйства.

Данное учебное пособие относится к первой части курса, читаемого автором в МВТУ им. Н. Э. Баумана. За ней следуют теория нелинейных систем и другие разделы курса, излагаемые в учебных пособиях: Попов Е. П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления.— М.: Наука, 1988; Иванов В. А., Ющенко А. С. Теория дискретных систем автоматического управления.— М.: Наука, 1983; Иванов В. А., Фалдин Н. В. Теория оптимальных систем автоматического управления.— М.: Наука, 1981; Горбачев Е. Д., Левинзон Ф. Ф. Аналоговое моделирование систем управления.— М.: Наука, 1984; Астапов Ю. М., Медведев В. С. Статистическая теория систем автоматического управления.— М.: Наука, 1982.

Необходимость издания таких кратких учебных пособий по отдельным разделам современного курса теории автоматического управления, которые соответствовали бы учебным программам, давно назрела (несмотря на наличие солидных учебников и монографий). В этом заинтересована не только большая масса студентов многих вузов, но и многочисленные преподаватели этой дисциплины, а также и широкий круг специалистов, которым приходится либо восстанавливать, либо приобретать заново знания в области теории автоматического управления в связи с все расширяющимися народнохозяйственными задачами в области автоматизации.

Наличие серии отдельных компактных учебных пособий, охватывающих в целом всю программу вузовских

лекций, представляется весьма удобным для использования широкой массой читателей.

В данную книгу не вошли вопросы исследования линейных систем при случайных воздействиях и лишь кратко даны основы теории линейных импульсных систем, поскольку в данной серии учебных пособий, как указано выше, изданы отдельные книги по статистической теории систем (как линейных, так и нелинейных) и по теории дискретных систем — импульсных и цифровых (линейных и нелинейных).

В настоящем втором издании книги во многих главах излагаемый материал частично переработан, и сделаны также необходимые дополнения. Наибольшие изменения и дополнения относятся к гл. 8. В частности, там введен новый раздел частотных методов для многомерных систем. Однако сохранены общий план и общая идеология книги, оправдавшие себя в практике использования данного учебного пособия.

Глава 7, содержащая метод корневого годографа, заменена совершенно новой главой «Метод пространства состояний в теории управления». О методе корневого годографа даны лишь основные понятия в § 6.5. Это принципиальное изменение продиктовано тем, что метод пространства состояний входит все больше в инженерную практику, в то время как метод корневого годографа утрачивает свою актуальность.

Практическое применение метода пространства состояний стимулируется развитием использования вычислительной техники при решении задач теории управления. В связи с этим в § 7.4 описаны алгоритмы и программа корневого синтеза корректирующих цепей линейных систем управления на базе пространства состояний. В приложениях даны текст программы и решение примера на ЭВМ.

При написании новой гл. 7 использованы материалы, предоставленные профессором Г. С. Черноруцким, за что автор выражает ему глубокую благодарность. Автор благодарит также В. А. Парасича и М. Н. Устюгова, разработавших помещенные в конце книги приложения. Некоторые материалы Г. С. Черноруцкого введены дополнительно в § 8.1 и § 8.5.

Теория автоматического управления и регулирования — наука, которая изучает процессы управления, методы их исследования и основы проектирования автоматических систем, работающих по замкнутому циклу, в любой области техники. Иначе говоря, она изучает процессы управления и задачи создания любых систем с обратной связью. Термин «управление» является более общим, чем «регулирование», что видно из дальнейшего.

Все системы управления делятся на разомкнутые и замкнутые.

На рис. В.1 изображена функциональная схема разомкнутой системы. Источником воздействия может быть

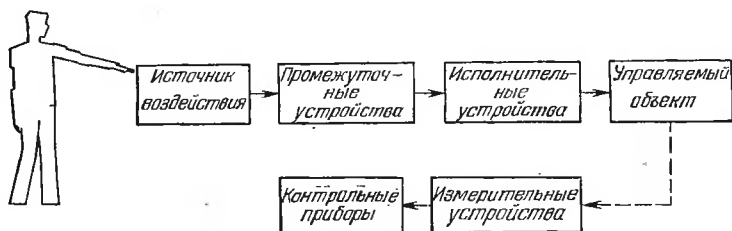


Рис. В.1

либо человек, либо автоматически действующее устройство (например, фотозлемент в системе автоматической охраны или в системе автоматического включения освещения). По разомкнутому принципу работают многие известные всем автоматы. Примером такой системы с человеком может служить также система управления полетом самолета летчиком, когда управляемым объектом является самолет или его двигатель.

На рис. В.2 приведена примерная функциональная схема замкнутой автоматической системы (системы управления с обратной связью).

Обратная связь, замыкающая систему, передает результат измерения выходной величины на вход систе-

мы. Эта выходная величина представляет собой физический параметр, подлежащий регулированию (x — регулируемая или управляемая величина).

Входные величины $g(t)$ и $f(t)$ являются соответственно задающим и возмущающим воздействиями. Задача системы состоит в том, чтобы возможно точнее воспроизводить на выходе x задаваемый закон изменения $g(t)$

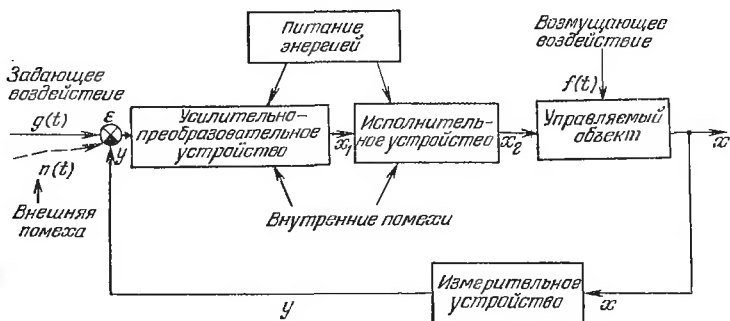


Рис. В.2

и возможно полнее подавлять влияние возмущающего воздействия $f(t)$, а также других внешних и внутренних помех, если они имеются. Для этой цели выходная величина x сравнивается через измеритель $y = kx$ с входной величиной $g(t)$. Получается рассогласование (ошибка)

$$\varepsilon = g(t) - y = g(t) - kx.$$

Рассогласование ε служит источником воздействия на систему, причем система работает на уничтожение или сведение к допустимому малому значению величины этого рассогласования (т. е. величины ошибки системы ε).

В общем случае задающее воздействие $g(t)$ может меняться произвольно.

Случаю $g(t) = \text{const}$ соответствует собственно автоматическое регулирование на поддержание постоянного значения регулируемой величины (например, скорости вращения вала двигателя, температуры в некоторой камере, напряжения на клеммах генератора и т. п.). Это типичная система регулирования по заданной настройке регулятора.

Такие системы ($g = \text{const}$) называют также *системами стабилизации* (например, стабилизация крена самолета, углового положения гироплатформы и т. п.).

Если $g(t)$ заранее задано во времени (например, $g = ct$), то заданный закон $g(t)$ называется программой управления. При таком программном автоматическом управлении выходная величина x должна следовать заданному закону изменения во времени. Примером может служить программа задания угла наклона продольной оси ракеты-носителя ϑ (при запуске спутника), начиная от вертикального положения на старте до горизонтального положения при выходе на круговую орбиту (рис. В.3).

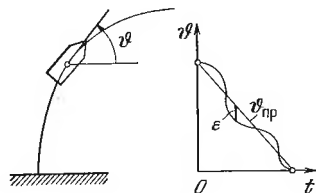


Рис. В.3

Рассогласование (ошибка управления, рис. В.3) будет

$$\epsilon = \vartheta_{\text{пр}} - \vartheta.$$

Оно служит управляющим сигналом для автоматического выдерживания задаваемого закона $\vartheta_{\text{пр}}(t)$.

К системам автоматического управления, работающим по замкнутому циклу, относятся также следящие системы. Пример показан на рис. В.4. В этом случае угол поворота выходного вала следящей системы $\beta(t)$ должен следовать произвольно задаваемому повороту входного вала $\alpha(t)$ с наименьшей ошибкой ϵ , причем

$$\epsilon = \alpha - \beta,$$

а управляющее воздействие

$$u = k\epsilon.$$

По принципу следящей системы работают системы наведения (рис. В.5) [11]. В следящей системе наведения антенны радиолокатора на летящую цель рассогласованием служит угловая ошибка ϕ между его лучом и направлением на цель. Исполнительным устройством является электропривод антенны. Радиолокационный сигнал рассогласования содержит помехи, которые должны в системе отфильтровываться от полезного управляющего сигнала (величины рассогласования).

В свою очередь, автопилот наводимой ракеты (рис. В.5) тоже работает по принципу следящей системы, причем рассогласованием для него служит отклонение ракеты от направления луча, а исполнительным устройством является рулевая машина и руль.

Другими примерами такого типа систем являются различные системы телеуправления и самонаведения.

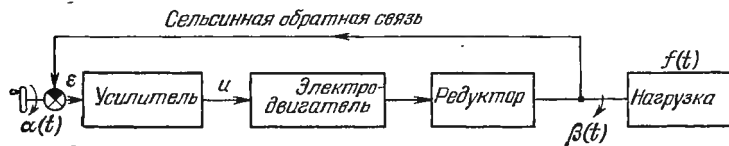


Рис. В.4

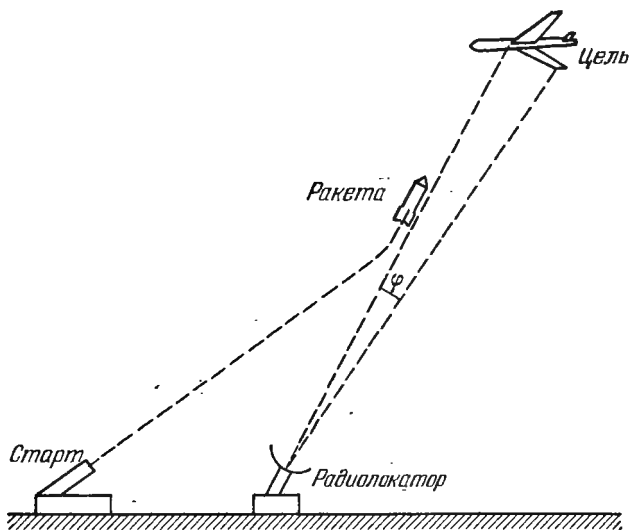


Рис. В.5

Примерами следящих систем могут являться также измерительные приборы, работающие по компенсационному принципу, когда рассогласованием служит разность между показанием прибора и входной измеряемой величиной (любой физической природы).

В качестве еще одного примера приведем систему автоматического управления курсом самолета (рис. В.6) при помощи автопилота.

На рис. В.6 обозначено: 1 — гироскоп (измеритель курсового угла ψ), 2 — усилитель, 3 — привод, 4 — руль, 5 — корпус самолета (управляемый объект). Звенья 1, 2, 3 составляют автопилот. Угол поворота руля δ представляет регулирующее воздействие на объект. Рассогласование формируется в виде электрической величины (рис. В.6, б)

$$\varepsilon = u_0 - u = k(\psi_0 - \psi),$$

где ψ_0 — заданный курсовой угол. Настройка автопилота на заданный курс производится установкой величины u_0 .

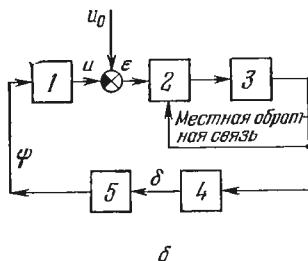
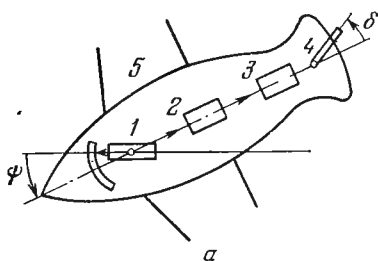


Рис. В.6

В данном примере показано, что кроме основной обратной связи (измерение регулируемой величины ψ) в системе могут иметься дополнительные местные обратные связи, назначение которых будет изучено позднее.

Важно отметить, что в замкнутых системах автоматического управления и регулирования, как правило, не бывает «спокойного» состояния равновесия. Все время имеются какие-то внешние возмущающие воздействия, порождающие рассогласование, которое заставляет систему работать. Поэтому важнейшим элементом проектирования таких систем является *исследование динамических процессов*, описываемых обычно системой дифференциальных уравнений, отражающих поведение всех звеньев системы.

Особенностью, усложняющей расчет динамики системы, является то, что в замкнутой системе все физические величины, представляющие воздействие одного звена на другое, связаны в единую замкнутую цепь. Поэтому приходится уравнения динамики всех звеньев системы решать совместно, т. е. иметь дело с дифферен-

циальными уравнениями высокого порядка. Это положение существенно для анализа и синтеза автоматических систем, для исследования устойчивости и качества процессов управления. С этим связан целый арсенал математических методов расчета, которые и будут изучаться в данной книге.

Исторически, первыми автоматическими регуляторами с замкнутым циклом были: регулятор уровня в котле паровой машины И. И. Ползунова (1765 г.) и регулятор скорости вала паровой машины Дж. Уатта

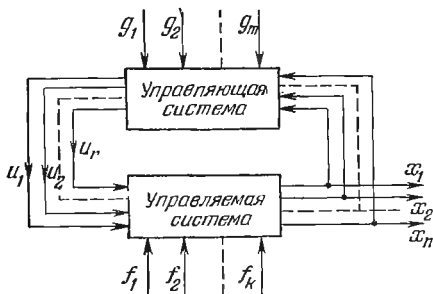


Рис. В.7

(1784 г.). Первые исследования динамики замкнутых автоматических систем, устойчивости и качества процессов регулирования принадлежат И. А. Вышнеградскому (1876 г.).

Выше приводились примеры и схемы автоматических систем с одной задаваемой $g(t)$ и одной регулируемой x величинами. В общем же случае система может иметь много входов и выходов (рис. В.7). Это *многомерные* (или *многосвязные*) системы.

Передача воздействий в системе представляет передачу потоков информации о состоянии отдельных элементов системы.

Кроме чисто технических автоматических систем аналогичные принципы действия заложены и в биологических системах, экономических системах и т. п., что изучается соответствующими направлениями кибернетики и общей теории систем управления, а также специальными дисциплинами.

Кроме полностью автоматических систем имеются автоматизированные системы управления или полуавтоматические, в которых кроме технических средств в состав

системы управления входят люди. Таковы, например, многие автоматизированные системы управления производственными процессами. В простейших случаях в систему управления включается один человек-оператор, например, при полуавтоматическом управлении летательным аппаратом или какой-либо наземной установкой. Таковы и системы дистанционного управления манипуляторами в агрессивных средах.

Все системы автоматического управления и регулирования делятся по различным признакам на следующие основные классы.

1. По основным видам уравнений динамики процессов управления:

- а) линейные системы;
- б) нелинейные системы.

2. Каждый из этих основных классов делится на:

- а) системы с постоянными параметрами (уравнения с постоянными коэффициентами);
- б) системы с переменными параметрами (уравнения с переменными коэффициентами);
- в) системы с распределенными параметрами (уравнения в частных производных);
- г) системы с запаздыванием (уравнения с запаздывающим аргументом).

3. По характеру передачи сигналов различают:

- а) непрерывные системы;
- б) дискретные системы (импульсные и цифровые);
- в) релейные системы.

4. По характеру процессов управления:

- а) детерминированные системы (определенные параметры и процессы);
- б) стохастические системы (случайные параметры и процессы).

5. По характеру функционирования:

- а) обычные системы;
- б) адаптивные системы (самонастраивающиеся, самоорганизующиеся, экстремальные);
- в) терминальные системы.

Последние отличаются тем, что в них ставится задача достижения определенного состояния системы в конечный момент времени. До этого весь процесс управления может идти достаточно произвольно с оптимизацией по каким-либо другим показателям, например по расходу энергии.

Приведенные выше примеры относятся к обычным системам. Адаптивные системы имеют, как правило, дополнительные блоки и контуры для анализа показателей качества процесса или внешних условий, по которым необходима адаптация системы.

Каждый из этих основных классов систем в свою очередь делится по ряду принципиальных признаков на различные типы и разновидности, не говоря уже о большом разнообразии конструктивного оформления и различной физической природе реальных систем.

Задачами линейной теории автоматического управления и регулирования являются:

1) изучение динамических свойств и характеристик различных типов звеньев автоматических систем любой физической природы и конструкции;

2) формирование функциональных и структурных схем автоматического управления и регулирования;

3) построение динамических характеристик этих систем;

4) определение ошибок и показателей точности замкнутых систем;

5) исследование устойчивости замкнутых систем;

6) оценка качественных показателей процессов управления;

7) определение чувствительности систем к изменению параметров и других факторов;

8) изучение различных видов корректирующих устройств, вводимых в системы для повышения точности и улучшения динамических качеств;

9) создание частотных, корневых и других методов синтеза корректирующих устройств и различных методов оптимизации систем по показателям качества;

10) разработка методов анализа и синтеза сложных многомерных и комбинированных систем автоматического управления.

Все это является базой для грамотного построения замкнутых автоматических систем и для инженерных расчетов при анализе существующих и проектировании новых систем автоматического управления. Эти методы широко применяются не только для систем регулирования и управления как таковых, но и во всех случаях анализа и разработки замкнутых динамических контуров в любых технических системах, в биотехнических и в экономических системах.

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВЕНЬЕВ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1.1. Уравнения звеньев и виды основных характеристик

Чтобы составить уравнения динамики системы автоматического управления или регулирования, система разбивается на звенья (см. рис. В.4 и В.6). Затем рассматривается каждое звено системы в отдельности (рис. 1.1). Входная x_1 и выходная x_2 величины соответствуют физическим величинам, выражающим воздействие предыдущего звена на данное звено (x_1) и воздействие данного звена на последующее (x_2). Например, в электродвигателе следящей системы (см. рис. В.4) роль величины x_1 будет играть напряжение в цепи возбуждения, x_2 — угловая скорость вала. Для самолета (см. рис. В.6) x_1 — угол поворота руля, x_2 — отклонение оси самолета по курсу.

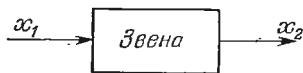


Рис. 1.1

Звено системы может являться техническим устройством любой физической природы, конструкции и назначения. Поэтому составление уравнения динамики каждого конкретного звена системы является предметом рассмотрения соответствующей конкретной области технических наук (электротехники, теплотехники, динамики полета и т. п.), к которой и следует каждый раз обращаться.

Допустим, что в результате составления уравнения динамики какого-нибудь конкретного звена получилось линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$a_0 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + a_1 \frac{dx_2}{dt} + a_2 x_2 = b_0 \frac{dx_1}{dt} + b_1 x_1. \quad (1.1)$$

В теории автоматического регулирования принято приводить уравнение звена к стандартному виду в

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) x_2 = k_1 (\tau_1 p + 1) x_1, \quad (1.2)$$

где p обозначает операцию дифференцирования $\left(p = \frac{d}{dt}\right)$.
Здесь введены *постоянные времени*, которые в данном случае будут

$$T_1 = \frac{a_1}{a_2}, \quad T_2^2 = \frac{a_0}{a_2}, \quad \tau_1 = \frac{b_0}{b_1},$$

и коэффициент усиления (передаточное число) звена

$$k_1 = \frac{b_1}{a_2}.$$

Очевидны следующие размерности этих постоянных:

$$T_1 [c], \quad T_2^2 [c^2], \quad \tau_1 [c], \quad k_1 \left[\frac{\text{разм. } x_2}{\text{разм. } x_1} \right].$$

В установившемся состоянии, когда $x_1 = \text{const}$ и $x_2 = \text{const}$, получаем из (1.2) уравнение

$$x_2 = k_1 x_1$$

и соответствующую ему линейную *статическую характеристику* звена (рис. 1.2), причем коэффициент усиления

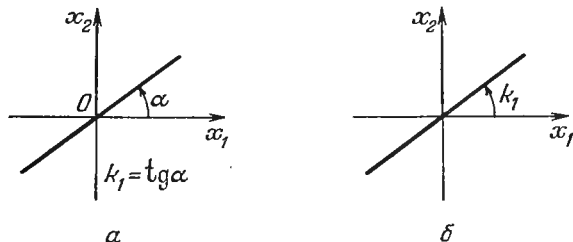


Рис. 1.2

k_1 определяет крутизну наклона этой характеристики ($k_1 = \text{tg } \alpha$ с учетом размерностей x_2 и x_1). Условимся в дальнейшем на статических характеристиках писать крутизну k_1 (коэффициент усиления), как показано на рис. 1.2, б, вместо обозначения угла.

Линеаризация уравнения звена. В общем случае при составлении уравнения динамики звена системы оно оказывается нелинейным

$$F(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2) = 0. \quad (1.3)$$

Обычно при исследовании процесса регулирования уравнение звена можно линеаризовать (для тех случаев, когда этого сделать нельзя, используются методы теории нелинейных систем). Линеаризация уравнения динамики звена (1.3) основана на том, что в процессе регулирования все величины мало отклоняются от их программных значений — иначе система не выполнила бы своей задачи и не была бы системой регулирования или управления.

Допустим, что установившиеся (программные) значения переменных x_1 и x_2 являются постоянными x_1^0, x_2^0 . Тогда можно записать

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1^0 + \Delta x_1(t), & \dot{x}_1 &= \Delta \dot{x}_1, \\x_2 &= x_2^0 + \Delta x_2(t), & \dot{x}_2 &= \Delta \dot{x}_2, & \ddot{x}_2 &= \Delta \ddot{x}_2,\end{aligned}$$

где символом Δ обозначены отклонения в процессе регулирования.

Из (1.3) можно записать уравнение звена в установившемся состоянии

$$F(x_1^0, 0, x_2^0, 0, 0) = 0. \quad (1.4)$$

Разложив левую часть уравнения (1.3) в ряд Тейлора, получим

$$\begin{aligned}F^0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right)^0 \Delta \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 \Delta x_2 + \\+ \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)^0 \Delta \dot{x}_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_2}\right)^0 \Delta \ddot{x}_2 + \dots = 0,\end{aligned}$$

где нуликом сверху обозначена подстановка $(x_1^0, 0, x_2^0, 0, 0)$.

Вычитая из данного выражения уравнение (1.4) и отбросив все последующие члены разложения как малые высшего порядка, придем к линейному уравнению динамики звена в виде (1.1), если опустить значки Δ и понимать под x_1 и x_2 отклонения, причем

$$\begin{aligned}a_0 &= \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_2}\right)^0, & a_1 &= \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)^0, & a_2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0, \\b_0 &= -\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right)^0, & b_1 &= -\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0.\end{aligned}$$

После этого можно перейти к стандартной записи (1.2).

Такому способу линейризации поддаются те нелинейные уравнения, для которых возможно разложение в ряд Тейлора.

Линеаризацию уравнений можно производить и графически, если имеется, например, зависимость $F(x_1)$ при постоянном $x_2 = x_2^0$ и $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \ddot{x}_2 = 0$ (рис. 1.3). Проведя касательную к заданной кривой $F(x_1)$ в точке x_1^0 ,

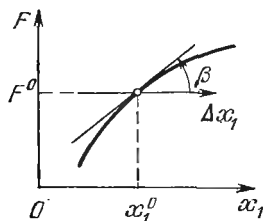


Рис. 1.3

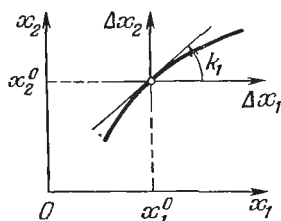


Рис. 1.4

найдем тангенс угла наклона касательной β , что с учетом масштабов даст значение коэффициента $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0$.

Аналогично, если задана нелинейная статическая характеристика звена $x_2 = f(x_1)$, ее можно линеаризовать путем проведения касательной (рис. 1.4), сведя таким образом к линейной (рис. 1.2).

Передаточная функция звена. Ее определение дается на базе преобразования Лапласа. Запишем преобразования Лапласа для выходной и входной величин звена:

$$X_2(s) = \mathcal{L}\{x_2(t)\} = \int_0^{\infty} x_2(t) e^{-st} dt, \quad X_1(s) = \mathcal{L}\{x_1(t)\}.$$

Пусть даны начальные условия

$$x_2(0) = x_{20}, \quad \left(\frac{dx_2}{dt}\right)_{t=0} = \dot{x}_{20}, \quad x_1(0) = x_{10}.$$

Тогда

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx_1}{dt}\right\} = sX_1 - x_{10}, \quad \mathcal{L}\left\{\frac{dx_2}{dt}\right\} = sX_2 - x_{20},$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x_2}{dt^2}\right\} = s^2X_2 - sx_{20} - \dot{x}_{20}.$$

Применив это преобразование к дифференциальному уравнению звена

$$T_2^2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + T_1 \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k \left(\tau_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 \right),$$

получим

$$X_2 = \frac{k_1 (\tau_1 s + 1)}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1} X_1 + \frac{B(s)}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}, \quad (1.5)$$

где через $B(s)$ обозначен многочлен, включающий в себя все члены с величинами начальных условий.

Передаточной функцией звена $W(s)$ называется отношение изображений Лапласа выходной и входной величин, т. е.

$$W(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)}, \quad (1.6)$$

при нулевых начальных условиях. В данном случае согласно (1.5) имеем

$$W(s) = \frac{k_1 (\tau_1 s + 1)}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}. \quad (1.7)$$

Сравнивая полученное выражение (1.7) с дифференциальным уравнением звена (1.2), видим, что формально передаточную функцию звена можно составлять как отношение операторных многочленов правой и левой частей уравнения звена. И наоборот, зная передаточную функцию (1.7) звена, легко написать его дифференциальное уравнение, имея в виду, что числитель передаточной функции соответствует правой части уравнения (1.2), а знаменатель передаточной функции (1.7) — левой части уравнения (1.2).

В общем случае передаточная функция звена имеет вид

$$W(s) = \frac{k_1 N(s)}{L(s)}, \quad (1.8)$$

где $N(s)$ и $L(s)$ — многочлены с коэффициентами 1 в младших членах, причем степень $N(s)$, как правило, ниже степени $L(s)$.

Дифференциальное уравнение звена. В общем случае в соответствии с (1.8) уравнение звена можно представить

в форме

$$L(p) x_2 = k_1 N(p) x_1 \quad \left(p = \frac{d}{dt}\right).$$

Характеристическое уравнение звена имеет вид

$$L(\lambda) = 0,$$

так что корни λ_i характеристического уравнения звена являются полюсами его передаточной функции.

Весовая функция звена. Весовой функцией звена $k(t)$ называется оригинал (т. е. обратное преобразование Лапласа) передаточной функции, а именно:

$$k(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} W(s) e^{st} ds =$$

$$= \sum_{i=1}^n \text{Res}[W(s) e^{st}]_{s=s_i},$$

где s_i — все полюса передаточной функции $W(s)$. Иногда вместо $k(t)$ применяют обозначение $w(t)$. В этой формуле Res обозначает вычеты (см. теорию функций комплексного переменного).

Поскольку при нулевых начальных условиях согласно (1.6)

$$X_2(s) = W(s) X_1(s),$$

то в случае, если $X_1 = 1$, т. е. если $x_1(t) = \delta(t)$ — дельта-функция, будет иметь место равенство

$$x_2(t) = k(t).$$

Известно, что δ -функция представляет собой единичный мгновенный импульс (рис. 1.5),

для которого $t_1 \rightarrow 0$, $c_1 \rightarrow \infty$, причем площадь $t_1 c_1 = 1$.

Следовательно, физический смысл весовой функции звена есть реакция звена на единичный мгновенный импульс, поданный на вход звена.

Иначе говоря, весовая функция $k(t)$ представляет собой переходный процесс на выходе звена (рис. 1.5) при подаче на его вход единичного импульса. Поэтому

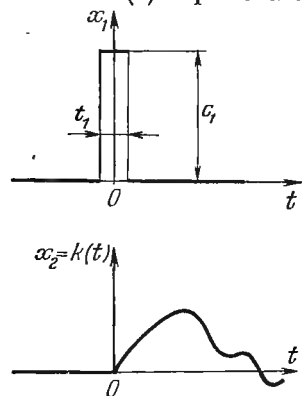


Рис. 1.5

весовую функцию звена часто называют *импульсной переходной функцией*.

Зная весовую функцию звена $k(t)$, можно определить его передаточную функцию:

$$W(s) = \mathcal{L}\{k(t)\}. \quad (1.9)$$

Переходная функция звена. Переходной функцией $h(t)$ называется реакция звена на единичное ступенчатое воздействие (рис. 1.6), т. е. переходный процесс на выходе x_2 при единичном скачке $1(t)$ на входе звена x_1 .

Следовательно, здесь имеем

$$X_1(s) = \mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s},$$

$$X_2(s) = W(s) X_1(s),$$

откуда

$$x_2(t) = h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} W(s)\right\}.$$

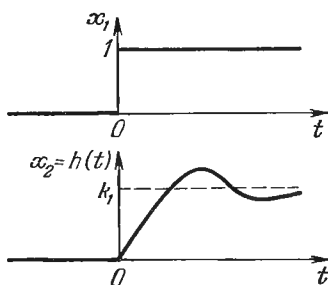


Рис. 1.6

Поскольку известно, что (имея в виду обобщенные функции)

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt},$$

то можно написать следующее соотношение между весовой и переходной функциями звена:

$$k(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

Частотные характеристики звена. Частотными характеристиками называются формулы и графики, характеризующие реакцию звена на синусоидальное входное воздействие в установившемся режиме, т. е. вынужденные синусоидальные колебания звена.

Если на вход звена подается (рис. 1.7)

$$x_1 = \sin \omega t,$$

то на выходе будет (в установившемся режиме)

$$x_2 = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда (точнее, усиление амплитуды), а φ — фаза (точнее, сдвиг по фазе).

Применяется символическая запись синусоидальных колебаний в виде

$$x_1 = e^{j\omega t}.$$

Строго говоря, $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$, что геометрически изображается вращающимся единичным вектором (рис. 1.8). Проекции последнего на прямоугольные оси

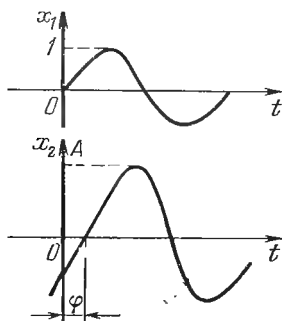


Рис. 1.7

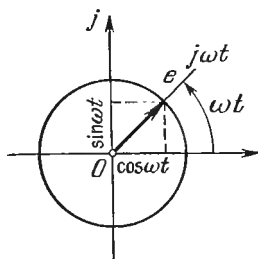


Рис. 1.8

дают $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$. Поэтому для суждения о вынужденных синусоидальных колебаниях звена достаточно формально исследовать реакцию звена на символический сигнал $e^{j\omega t}$.

Пусть, например, уравнение звена имеет вид

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) x_2 = k_1 (\tau_1 p + 1) x_1.$$

Используем символическую запись:

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{j\omega t}, & p x_1 &= j\omega e^{j\omega t}, \\ x_2 &= A e^{j(\omega t + \varphi)}, & p x_2 &= A j\omega e^{j(\omega t + \varphi)}, \\ p^2 x_2 &= A (j\omega)^2 e^{j(\omega t + \varphi)}. \end{aligned}$$

Подставив эти величины в уравнение звена, получим

$$[T_2^2 (j\omega)^2 + T_1 (j\omega) + 1] A e^{j(\omega t + \varphi)} = k_1 (\tau_1 j\omega + 1) e^{j\omega t},$$

откуда

$$A e^{j\varphi} = \frac{k_1 (\tau_1 j\omega + 1)}{T_2^2 (j\omega)^2 + T_1 (j\omega) + 1}.$$

Сравнивая это выражение с передаточной функцией данного звена (1.7), видим, что

$$A e^{j\varphi} = [W(s)]_{s=j\omega} = W(j\omega). \quad (1.10)$$

Отсюда находим

$$A = |W(j\omega)|, \quad \varphi = \arg W(j\omega). \quad (1.11)$$

В общем виде согласно (1.8) имеем

$$W(j\omega) = \frac{k_1 N(j\omega)}{L(j\omega)}.$$

Выражение (1.10) представляет *амплитудно-фазовую частотную характеристику* звена. Иногда $W(j\omega)$ называют частотной передаточной функцией звена. Выражения же (1.11) называются соответственно *амплитудной частотной характеристикой* звена и *фазовой частотной характеристикой* звена.

Графически амплитудно-фазовая частотная характеристика (1.10) изображается на комплексной плоскости (рис. 1.9) в полярных координатах (A, φ) , как годограф функции $W(j\omega)$. Можно строить амплитудно-фазовую частотную характеристику и в прямоугольных координатах (U, V) (рис. 1.9), выделив в выражении $W(j\omega)$ вещественную и мнимую части:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega).$$

При этом $U(\omega)$ называют *вещественной частотной характеристикой*, а $V(\omega)$ — *мнимой*.

Заметим, что угол φ показан на рис. 1.9 как отрицательный (отложен по часовой стрелке), поскольку чаще всего реакция на выходе звена имеет отставание по фазе по сравнению с входной величиной.

При этом частоту ω изменяют от 0 до ∞ (сплошная кривая на рис. 1.9) или же от $-\infty$ до $+\infty$, когда добавляется еще симметричная к ней пунктирная кривая. Симметрия кривых при $\omega < 0$ и $\omega > 0$ объясняется тем, что передаточная функция $W(s)$ согласно (1.8) есть отношение многочленов (дробно-рациональная функция). Поэтому

$$W(-j\omega) = \overline{W(j\omega)},$$

т. е.

$$U(-\omega) = U(\omega), \quad V(-\omega) = -V(\omega),$$

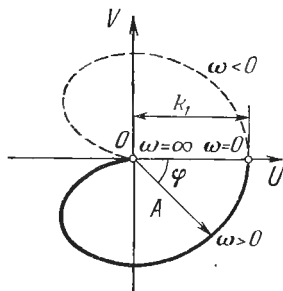


Рис. 1.9

где чертой сверху обозначено комплексно-сопряженное выражение.

Графики амплитудной и фазовой частотных характеристик (1.11) тоже изображаются графически (рис. 1.10), причем амплитуда является четной функцией, т. е. $A(-\omega) = A(\omega)$, а фаза — нечетной функцией, т. е. $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$.

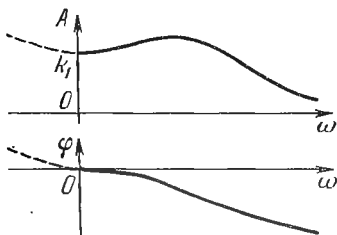


Рис. 1.10

Логарифмические частотные характеристики. В практических применениях чаще всего амплитудную и фазовую частотные характеристики изображают в логарифмическом масштабе. Впоследствии увидим, что такие логарифмические частотные ха-

рактеристики очень удобны для инженерных расчетов.

При построении *логарифмической амплитудной частотной характеристики* (ЛАХ) по оси ординат откладывают величину

$$Lm(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|, \quad (1.12)$$

единицей измерения для которой является децибел. По оси абсцисс откладывается частота $\omega \left[\frac{1}{c} \right]$ в логарифмическом масштабе (рис. 1.11). Равномерной единицей на оси абсцисс является декада — любой отрезок, на котором значение частоты ω увеличивается в десять раз. Точка пересечения ЛАХ с осью абсцисс называется *частотой среза* ω_c .

Начало координат обычно помещают в точке $\omega = 1$, так как $\lg 1 = 0$. Точка же $\omega = 0$ лежит в $-\infty$. Однако в зависимости от интересующего нас диапазона частот можно начало координат брать в другой точке ($\omega = 0, 1$; $\omega = 10$ или др.). Важно иметь в виду, что ось абсцисс ($Lm = 0$) согласно (1.12) соответствует значению $A = 1$, т. е. прохождению амплитуды сигнала через звено в натуральную величину. Верхняя полуплоскость ЛАХ соответствует значениям $A > 1$ (усиление амплитуды), а нижняя полуплоскость — значениям $A < 1$ (ослабление амплитуды).

При построении *логарифмической фазовой частотной характеристики* (ЛФХ) отсчет углов φ идет по оси орди-

нат в обычном масштабе в угловых градусах (рис. 1.11). По оси абсцисс откладывается по-прежнему частота ω в логарифмическом масштабе.

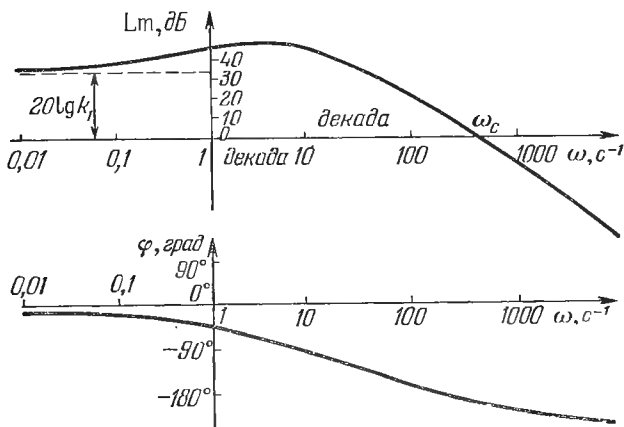


Рис. 1.11

Между частотными характеристиками и весовой функцией существуют соотношения, определяемые из (1.9) подстановкой $s = j\omega$, а именно:

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-j\omega t} dt, \quad k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Эти формулы представляют собой известные преобразования Фурье.

Как видим, все рассмотренные виды динамических характеристик звеньев (передаточная функция, дифференциальное уравнение, весовая функция, переходная функция, амплитудно-фазовая частотная характеристика) связаны между собой определенными зависимостями. Поэтому все они эквивалентны друг другу в определении динамических свойств звена системы управления.

§ 1.2. Типы позиционных звеньев и их характеристики

Типы звеньев систем автоматического управления и регулирования различаются по виду их передаточной функции (или дифференциального уравнения), определяющей все их динамические свойства и характеристики.

Основные типы звеньев делятся на три группы: позиционные, дифференцирующие и интегрирующие.

Позиционными звеньями называются такие, в передаточной функции которых

$$W(s) = \frac{k_1 N(s)}{L(s)} \quad (1.13)$$

многочлены $N(s)$ и $L(s)$ имеют свободные члены (равные 1), т. е. эти звенья обладают статической характеристикой $x_2 = k_1 x_1$ (при $s = 0$), определяющей их установившееся состояние (свойство позиционности).

У дифференцирующих звеньев в выражении (1.13) отсутствует свободный член числителя, т. е. для однократно дифференцирующего звена передаточная функция

$$W(s) = \frac{k_1 s N_1(s)}{L(s)}, \quad (1.14)$$

где $N_1(s)$ имеет свободный член, равный 1. Для двукратно дифференцирующего звена

$$W(s) = \frac{k_1 s^2 N_1(s)}{L(s)}. \quad (1.15)$$

Передаточные функции интегрирующих звеньев имеют соответственно вид

$$W(s) = \frac{k_1 N(s)}{s L_1(s)} \quad \text{или} \quad \frac{k_1 N(s)}{s^2 L_1(s)}, \quad (1.16)$$

где $L_1(s)$ имеет свободный член, равный 1, как и $N(s)$.

Знание характеристик типовых звеньев столь же необходимо для расчетов систем управления, как знание таблицы умножения в арифметике.

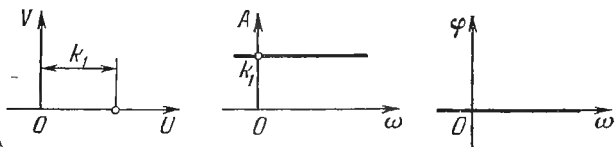


Рис. 1.12

В данном параграфе изучим свойства основных типов позиционных звеньев.

Идеальное усилительное (безынерционное) звено. Уравнение и передаточная функция звена:

$$x_2 = k_1 x_1, \quad W(s) = k_1.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 1.12):

$$W(j\omega) = k_1, \quad A(\omega) = k_1, \quad \varphi(\omega) = 0.$$

Переходная и весовая функции:

$$h(t) = k_1 \quad (t > 0), \quad k(t) = k_1 \delta(t).$$

Примерами таких безынерционных звеньев могут служить жесткие механические и гидравлические передачи, электронный усилитель сигналов на низких частотах, гироскоп и некоторые другие измерительные датчики.

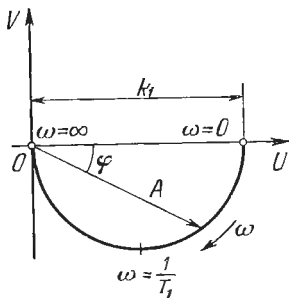


Рис. 1.13

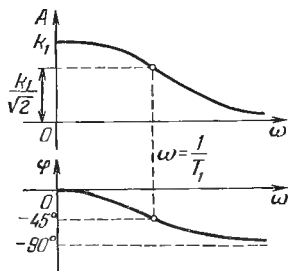


Рис. 1.14

Апериодическое (инерционное) звено. Уравнение и передаточная функция звена:

$$(T_1 p + 1) x_2 = k_1 x_1, \quad W(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика звена (рис. 1.13) имеет вид полуокружности и описывается выражениями

$$W(j\omega) = \frac{k_1}{T_1 j\omega + 1}, \quad W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

$$U(\omega) = \frac{k_1}{T_1^2 \omega^2 + 1}, \quad V(\omega) = -\frac{k_1 T_1 \omega}{T_1^2 \omega^2 + 1}.$$

Амплитудная и фазовая частотные характеристики соответственно будут (рис. 1.14):

$$A(\omega) = \frac{k_1}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}, \quad \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} T_1 \omega.$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика звена имеет вид

$$L_m(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k_1 - 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}.$$

Эта характеристика обладает асимптотами:

а) при $\omega \rightarrow 0$: $L_m(\omega) \rightarrow 20 \lg k_1$,

б) при $\omega \rightarrow \infty$: $L_m(\omega) \rightarrow 20 \lg k_1 - 20 \lg T_1 \omega$.

Последняя будет наклонной прямой с наклоном -20 дБ/дек, а первая — горизонтальная прямая (рис. 1.15). Пересекаются они в точке $\omega = \frac{1}{T_1}$. Сама ЛАХ (пунктир на рис. 1.15) близка к этим асимптотам. Наибольшее ее отклонение будет в точке $\omega = \frac{1}{T_1}$, а именно:

$$\Delta = 20 \lg k_1 - \left(20 \lg k_1 - 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} \right) = 3,03 \text{ дБ}.$$

В инженерных расчетах такой разницей пренебрегают и считают, что логарифмическая амплитудная частотная характеристика апериодического звена имеет вид ломаной, состоящей из двух прямых, показанных на рис. 1.15.

Видно, что чем меньше постоянная времени звена T_1 , тем больший диапазон частот ($0 < \omega < \omega_c$) входного сигнала «пропускает» звено с усилением, так как (см. рис. 1.15)

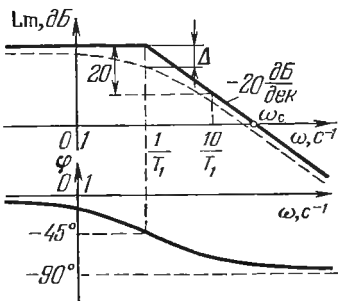


Рис. 1.15

$$\omega_c = \frac{k_1}{T_1}.$$

Переходная функция, согласно решению уравнения звена, при $x_1 = 1(t)$ и нулевых начальных условиях имеет вид

$$h(t) = k_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right), \quad t > 0,$$

а весовая функция

$$k(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{k_1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}, \quad t > 0.$$

Обе они изображены на рис. 1.16.

Постоянная времени T_1 определяет наклон касательной в начале кривой (рис. 1.16). Следовательно, величина T_1 характеризует степень инерционности звена, т. е. длительности переходного процесса. Практически

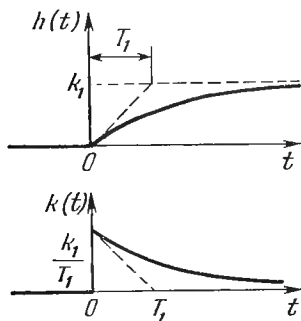


Рис. 1.16

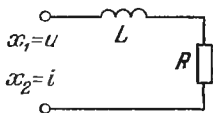


Рис. 1.17

с точностью до 5 % переходный процесс считается затухшим за время

$$t_{\pi} = 3T_1. \quad (1.17)$$

Примером апериодического звена является (в первом приближении) электродвигатель, если x_1 — управляющее напряжение, x_2 — угловая скорость вала. Другой пример — цепочка LR (рис. 1.17), в которой x_1 — входное напряжение u , а x_2 — ток в цепи i .

Апериодическое звено второго порядка. Уравнение и передаточная функция звена имеют вид

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) x_2 = k_1 x_1, \quad W(s) = \frac{k_1}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1},$$

причем предполагается, что

$$T_1 \geq 2T_2,$$

так как при этом корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2}$$

будут вещественными. Передаточную функцию апериодического звена второго порядка, разложив знаменатель на

сомножители, можно записать в виде

$$W(s) = \frac{k_1}{(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}$$

где

$$T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 1.18 и 1.19) звена:

$$W(j\omega) = \frac{k_1}{(T_3 j\omega + 1)(T_4 j\omega + 1)}$$

$$A(\omega) = \frac{k_1}{\sqrt{(T_3^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} T_3 \omega - \operatorname{arctg} T_4 \omega.$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика звена:

$$\operatorname{Lm}(\omega) = 20 \lg A(\omega) =$$

$$= 20 \lg k_1 - 20 \lg \sqrt{T_3^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_4^2 \omega^2 + 1}.$$

Истинная характеристика близка к ломаной линии (рис. 1.20), которая и применяется в инженерных расчетах. Она получена следующим образом. Первые два

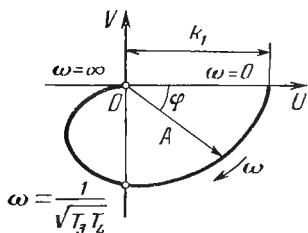


Рис. 1.18

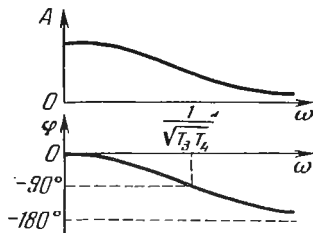


Рис. 1.19

слагаемые дают результат, показанный на рис. 1.15. Третье же слагаемое добавляет еще наклон — 20 дБ/дек, начиная с частоты $\omega = \frac{1}{T}$. Там же (рис. 1.20) показана и логарифмическая фазовая характеристика $\varphi(\omega)$.

В граничном случае, когда $T_1 = 2T_2$, имеем $T_3 = T_4$ и все три отмеченные на осях абсцисс характерные точки совпадают в одну. Если же $T_1 < 2T_2$, звено переходит в колебательное (см. ниже). Поэтому постоянная T_1 , определяющая инерционность звена, является в то же время демпфирующим фактором (увеличение T_1 приводит

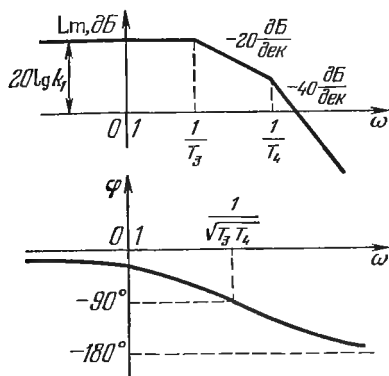


Рис. 1.20

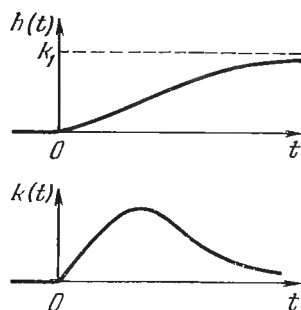


Рис. 1.21

к отсутствию колебаний). Переходная и весовая функции аperiodического звена 2-го порядка, получаемые аналогично предыдущему, имеют вид (рис. 1.21):

$$h(t) = k_1 \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right),$$

$$k(t) = \frac{k_1}{T_3 - T_4} \left(e^{-\frac{t}{T_3}} - e^{-\frac{t}{T_4}} \right), \quad t > 0.$$

Примерами такого звена являются двигатель постоянного тока при учете инерционности цепи якоря, электромашинный усилитель, двойная цепочка LR .

Колебательное звено. Уравнение звена имеет вид

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) x_2 = k_1 x_1,$$

причем предполагается

$$T_1 < 2T_2,$$

так что корни характеристического уравнения — комплексные.

Общепринята запись передаточной функции колебательного звена в виде

$$W(s) = \frac{k_1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1},$$

где $T = T_2$, $\zeta = \frac{T_1}{2T_2}$, причем $0 < \zeta < 1$, так как при $\zeta \geq 1$ звено становится апериодическим (второго порядка).

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 1.22 и 1.23) звена:

$$W(j\omega) = \frac{k_1}{T^2 (j\omega)^2 + 2\zeta T j\omega + 1},$$

$$A(\omega) = \frac{k_1}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\zeta T \omega}{1 - T^2 \omega^2}.$$

В случае, если $1 > \zeta > 0,707$ амплитуда A (рис. 1.23) уменьшается с увеличением ω , т. е. $A(\omega) \leq k_1$. При $\zeta < 0,707$ появляется «горб» на характеристике $A(\omega)$, который уходит в бесконечность при $\zeta \rightarrow 0$. Поэтому величина $\zeta = \frac{T_1}{2T_2}$ называется *параметром затухания*. Отсюда видна роль постоянных времени T_1 и T_2 в уравнении

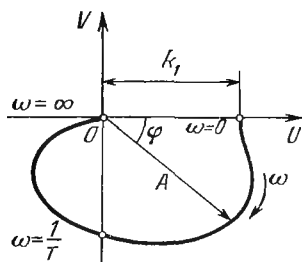


Рис. 1.22

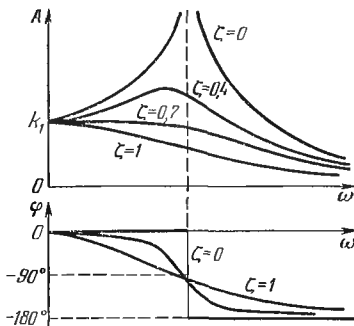


Рис. 1.23

звена: постоянная T_2 «раскачивает» колебания, а T_1 — «демпфирует» их.

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика звена

$$\operatorname{Lm}(\omega) = 20 \lg k_1 - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}.$$

При $\omega \rightarrow \infty$ получаем $Lm(\omega) \rightarrow 20 \lg k_1 - 40 \lg T\omega$, как показано на рис. 1.24. Поэтому при значениях $0,5 < \xi < 1$ характеристика близка к ломаной (рис. 1.24). Если же

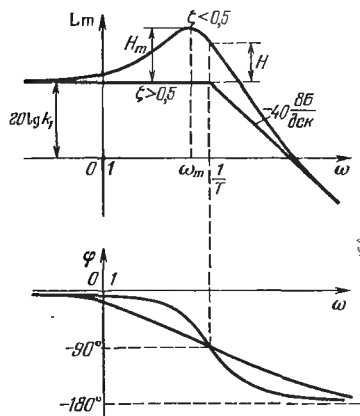


Рис. 1.24

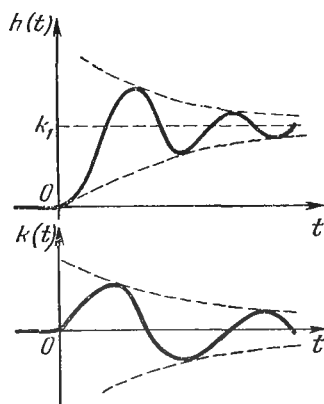


Рис. 1.25

$\xi < 0,5$, то получается заметный «горб» (рис. 1.24). Тут необходимо вычислять превышение

$$H_m = 20 \lg \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}},$$

на частоте

$$\omega_m = \frac{1}{T} \sqrt{1-2\xi^2}.$$

В упрощенных расчетах достаточно находить (см. рис. 1.24):

$$H = 20 \lg \frac{1}{2\xi} \text{ при } \omega = \frac{1}{T}.$$

Переходная и весовая функции колебательного звена изображены на рис. 1.25. Они, как решения дифференциального уравнения звена, имеют вид соответственно

$$h(t) = k_1 \left[1 - e^{-\frac{\xi}{T}t} \left(\cos \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t \right) \right],$$

$$k(t) = \frac{k_1 \xi}{T \sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T}t} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t, \quad t > 0.$$

Здесь огибающая (пунктир на рис. 1.25) и частота колебаний определяются формулами соответственно

$$k_1 e^{-\frac{\zeta}{T}t}, \quad \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}.$$

Поэтому аналогично (1.17) длительность переходного процесса можно оценить практически в виде

$$t_n = 3 \frac{T}{\zeta}.$$

Примеры колебательных звеньев изображены на рис. 1.26. При $\zeta = 0$ колебания становятся незатухающими, а при $\zeta = 1$ колебания вырождаются в апериодический процесс.

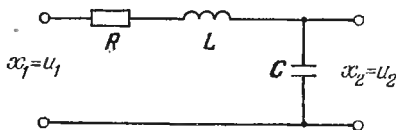
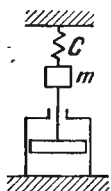


Рис. 1.26

Частный случай колебательного звена при $\zeta = 0$, когда $h(t)$ и $k(t)$ становятся незатухающими (периодическими), носит название консервативного звена.

§ 1.3. Типы интегрирующих и дифференцирующих звеньев и их характеристики

Определение понятия интегрирующих и дифференцирующих звеньев было дано в общем виде в предыдущем параграфе. Здесь рассмотрим основные их типы.

Идеальное интегрирующее звено. Уравнение и передаточная функция звена имеют вид

$$x_2 = k_1 \int x_1 dt \text{ или } p x_2 = k_1 x_1, \quad W(s) = \frac{k_1}{s}.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика звена (рис. 1.27):

$$W(j\omega) = -j \frac{k_1}{\omega}, \quad A(\omega) = \frac{k_1}{\omega}, \quad \varphi(\omega) = -90^\circ.$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика

$$L_m(\omega) = 20 \lg k_1 - 20 \lg \omega.$$

Поскольку на оси абсцисс откладываются значения $\lg \omega$, то мы имеем здесь уравнение прямой, проходящей через точку $20 \lg k_1$ при $\omega = 1$ с наклоном -20 дБ/дек. Это и показано на рис. 1.28 вместе с фазовой частотной характеристикой.

Переходная и весовая функции (рис. 1.29) имеют вид

$$h(t) = k_1 t,$$

$$k(t) = k_1, \quad t > 0.$$

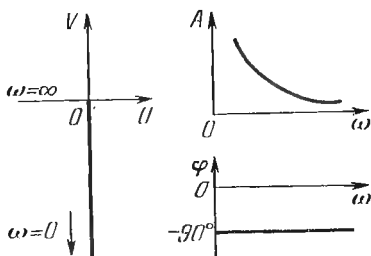


Рис. 1.27

Примеры идеальных интегрирующих звеньев изображены на рис. 1.30.

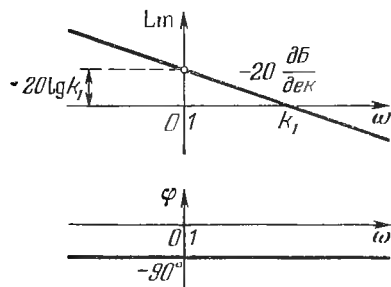


Рис. 1.28

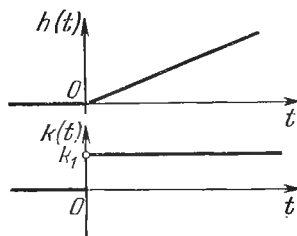


Рис. 1.29

Инерционное интегрирующее звено. Уравнение и передаточная функция звена

$$(T_1 p + 1) p x_2 = k_1 x_1, \quad W(s) = \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)}.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(j\omega) = \frac{k_1}{j\omega(T_1 j\omega + 1)},$$

$$A = \frac{k_1}{\omega \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}, \quad \varphi = -90^\circ - \arctg T_1 \omega.$$

Вещественная и мнимая части амплитудно-фазовой характеристики имеют вид

$$U(\omega) = -\frac{k_1 T_1}{T_1^2 \omega^2 + 1}, \quad V(\omega) = -\frac{k_1}{\omega(T_1^2 \omega^2 + 1)}.$$

Отсюда видно, что при $\omega \rightarrow 0$ имеем $U \rightarrow -k_1 T_1$, $V \rightarrow -\infty$, что и отражено на рис. 1.31.

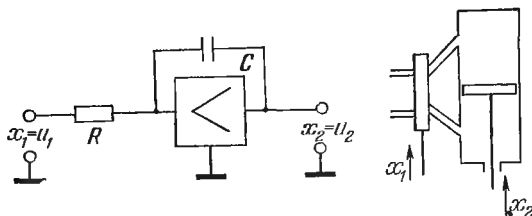


Рис. 1.30

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика

$$Lm(\omega) = 20 \lg k_1 - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}.$$

Здесь к прежней прямой добавляется наклон -20 дБ/дек,

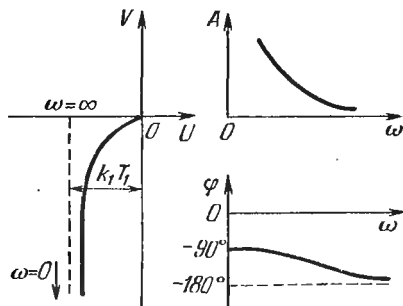


Рис. 1.31

начиная с частоты $\omega = \frac{1}{T_1}$, что показано на рис. 1.32. Там же изображена и логарифмическая фазовая частотная характеристика.

Переходная и весовая функции, как решения уравнения звена соответственно при $x_1 = 1(t)$ и $x_1 = \delta(t)$, изо-

браженные на рис. 1.33, имеют вид

$$h(t) = k_1 \left[t - T_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) \right], \quad t > 0,$$

$$k(t) = k_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right), \quad t > 0.$$

Следовательно, за счет постоянной времени T_1 , вместо идеального интегрирования (рис. 1.29), здесь получается интегрирование с инерционным запаздыванием (рис. 1.33).

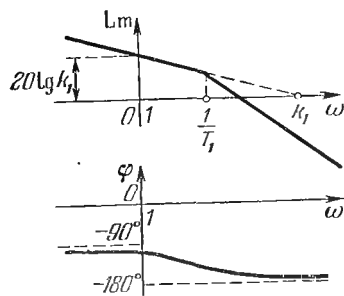


Рис. 1.32

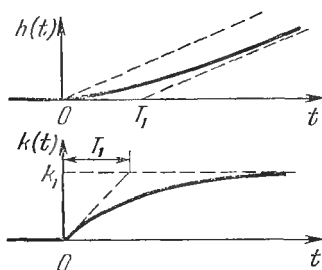


Рис. 1.33

Примером такого инерционного интегрирующего звена является электродвигатель, если выходной величиной считать угол поворота вала двигателя.

Идеальное дифференцирующее звено. Уравнение и передаточная функция звена:

$$x_2 = k_1 p x_1, \quad W(s) = k_1 s.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 1.34) звена:

$$W(j\omega) = jk_1\omega, \quad A = k_1\omega, \quad \varphi = +90^\circ.$$

В реальных системах такой вид характеристики звена возможен лишь в ограниченной полосе частот, так как неограниченное увеличение амплитуды с ростом частоты требует бесконечной энергии.

Логарифмические частотные характеристики (рис. 1.35):

$$Lm(\omega) = 20 \lg k_1 + 20 \lg \omega, \quad \varphi = +90^\circ.$$

В отличие от интегрирующего звена, здесь имеет место положительный наклон $+20$ дБ/дек и положительная фаза. Наличие положительной фазы означает опережение сигнала на выходе звена по отношению к входу. Физически это связано с тем, что, как видно из уравнения,

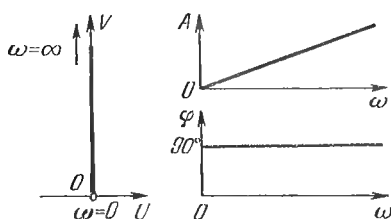


Рис. 1.34

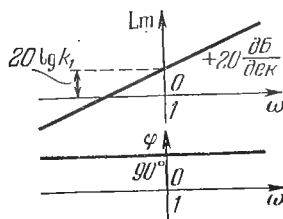


Рис. 1.35

звено реагирует на скорость изменения входной величины, т. е. не на саму величину x_1 , а на тенденцию изменения ее в будущем. Как говорят, звено обладает предсказанием.

Переходная и весовая функции имеют вид

$$h_1(t) = k_1 \delta(t), \quad k(t) = k_1 \frac{d\delta}{dt}, \quad t > 0.$$

Примерами такого типа звена являются (рис. 1.36) тахогенератор и RC -цепочка с усилителем.

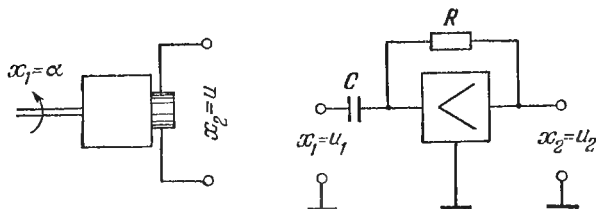


Рис. 1.36

Идеальное звено с введением производной. Уравнение и передаточная функция звена:

$$x_2 = k_1(1 + T_1 p)x_1, \quad W(s) = k_1(1 + T_1 s).$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 1.37):

$$W(j\omega) = k_1(1 + jT_1\omega), \quad A = k_1 \sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}, \quad \varphi = \arctg T_1\omega.$$

Это возможно так же, как и в предыдущем случае, лишь в ограниченной полосе частот. Логарифмические частотные характеристики (рис. 1.38) звена:

$$\text{Lm}(\omega) = 20 \lg k_1 + 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}, \quad \varphi = \arctg T_1 \omega.$$

Переходная и весовая функции имеют вид

$$h(t) = k_1 [1 + T_1 \delta(t)], \quad k(t) = k_1 \left[\delta(t) + T_1 \frac{d\delta}{dt} \right], \quad t > 0.$$

Инерционное дифференцирующее звено. Уравнение и передаточная функция звена:

$$(T_1 p + 1) x_2 = k_1 p x_1, \quad W(s) = \frac{k_1 s}{T_1 s + 1}.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 1.39) звена:

$$W(j\omega) = \frac{jk_1 \omega}{T_1 j\omega + 1}, \quad A(\omega) = \frac{k_1 \omega}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}, \quad \varphi = 90^\circ - \arctg T_1 \omega.$$

Логарифмические частотные характеристики (рис. 1.40):

$$\text{Lm}(\omega) = 20 \lg k_1 + 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}, \\ \varphi = 90^\circ - \arctg T_1 \omega.$$

Переходная и весовая функции (рис. 1.41) имеют вид

$$h(t) = \frac{k_1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}, \quad k(t) = \frac{k_1}{T_1} \delta(t) - \frac{k_1}{T_1^2} e^{-\frac{t}{T_1}}, \quad t > 0.$$

Примерами такого типа звена являются (рис. 1.42) обычная цепочка RC , трансформатор, механический демпфер с пружиной. Здесь мы видим реальное ограничение амплитуды при увеличении частоты (рис. 1.40). Аналогично и для инерционного звена с введением производной реальное ограничение определяется передаточной функцией

$$W(s) = k_1 \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s}$$

за счет постоянной времени T_2 .

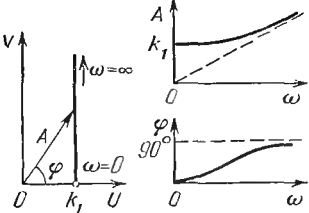


Рис. 1.37

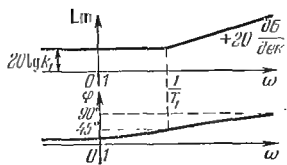


Рис. 1.38

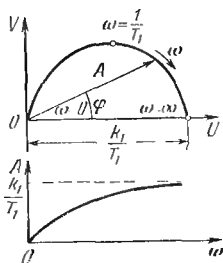


Рис. 1.39

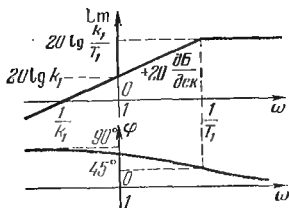


Рис. 1.40

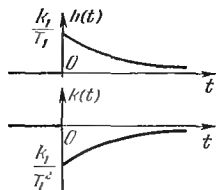


Рис. 1.41

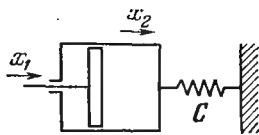
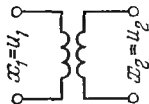
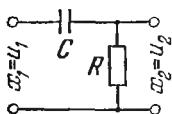


Рис. 1.42

§ 1.4. Другие типы звеньев

Как уже говорилось, в общем случае передаточная функция звена имеет вид

$$W(s) = \frac{k_1 N(s)}{L(s)},$$

где $N(s)$ и $L(s)$ — многочлены с коэффициентами 1 при младших членах. Выше были рассмотрены наиболее часто встречающиеся на практике основные типы звеньев. Все они характеризуются отсутствием корней с положительной вещественной частью как в числителе $N(s)$ (т. е. нулей передаточной функции), так и в знаменателе $L(s)$ (т. е. полюсов). Все звенья, обладающие этим свойством, называются *минимально-фазовыми*. Смысл такого названия выяснится ниже.

Неминимально-фазовые звенья. В отличие от рассмотренных выше, любое звено, передаточная функция которого имеет хотя бы один корень числителя $N(s)$ или знаменателя $L(s)$ с положительной вещественной частью, называется *неминимально-фазовым* звеном. Приведем пример такой передаточной функции

$$W(s) = \frac{k_1}{T_1 s - 1}. \quad (1.18)$$

Здесь имеется положительный полюс (корень знаменателя)

$$s_1 = \frac{1}{T_1}.$$

Частотные характеристики такого звена:

$$A(\omega) = \frac{k_1}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}$$

$$\varphi = -\arctg \frac{T\omega}{-1} = -(180^\circ - \arctg T_1 \omega) = \arctg T_1 \omega - 180^\circ,$$

в то время как для обычного апериодического звена имеем

$$W(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, \quad s_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad \varphi = -\arctg T_1 \omega.$$

Разница между ними, как видим, в величине фазы. Амплитудные же характеристики одинаковы. Оказыва-

ется, что из всех возможных звеньев с одинаковыми амплитудными характеристиками обычные типовые звенья обладают наименьшими по абсолютному значению фазовыми характеристиками. В этом и состоит смысл введенных терминов.

Важным свойством минимально-фазовых звеньев является однозначное соответствие амплитудной и фазовой частотных характеристик. Другими словами, по заданной амплитудной характеристике всегда можно определить фазовую и наоборот. То же самое свойство относится и

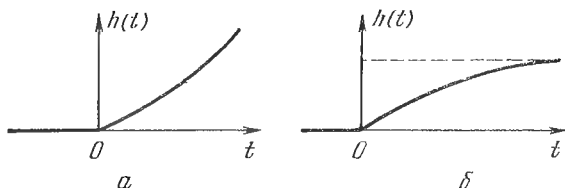


Рис. 1.43

к вещественной $U(\omega)$ и мнимой $V(\omega)$ частям амплитудно-фазовой частотной характеристики минимально-фазовых звеньев.

Заметим, что, в частности, для данного неминимально-фазового звена (1.18) переходная функция будет расходящейся (рис. 1.43, а), вместо обычной затухающей (рис. 1.43, б).

Звенья с модулированным сигналом (на несущей переменного тока). Звено с модулированным сигналом отличается тем, что сигнал, характеризующий передачу

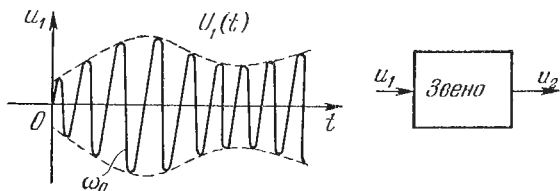


Рис. 1.44

воздействия в цепи регулирования $U_1(t)$, является огибающей несущих колебаний $u_1(t)$, имеющих заданную сравнительно высокую частоту ω_0 (рис. 1.44). Такой вид имеет, например, передача сигналов в цепях на переменном токе.

Для получения частотной характеристики такого звена нужно выходной сигнал $U_1(t)$ изменять по синусоидальному закону с некоторой частотой Ω и с единичной амплитудой. Тогда входная величина будет

$$u_1 = U_1(t) \cos \omega_0 t = \sin \Omega t \cos \omega_0 t$$

или

$$u_1 = \frac{1}{2} [\sin (\omega_0 + \Omega) t + \sin (\omega_0 - \Omega) t].$$

Соответственно на выходе получим зависимость амплитуды A сигнала U_2 от частоты, различную при разных передаточных функциях. Например, чтобы получить

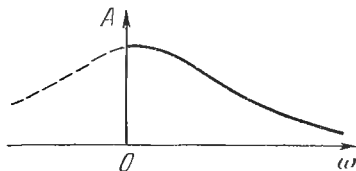


Рис. 1.45

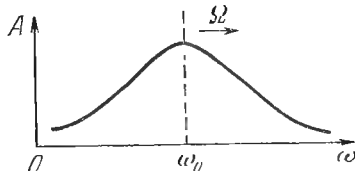


Рис. 1.46

аналог обычного аperiodического звена (рис. 1.45), нужно схему звена на переменном токе составить так, чтобы его амплитудная частотная характеристика имела вид, показанный на рис. 1.46, где обозначено

$$\omega = \omega_0 + \Omega.$$

Такой подход является основой для получения аналогов различных типов звеньев на переменном токе [1].

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 2.1. Передаточные функции и характеристики разомкнутой цепи звеньев

Изучаемые здесь системы автоматического управления и регулирования являются замкнутыми системами. Но при их проектировании часто предварительно рассматривается разомкнутая цепь звеньев, которая затем

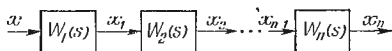


Рис. 2.1

замыкается. Составим сначала передаточные функции разомкнутой цепи звеньев.

1. Цепь из последовательно соединенных звеньев (рис. 2.1). Пусть заданы передаточные функции всех звеньев:

$$\frac{X_1}{X} = W_1(s), \quad \frac{X_2}{X_1} = W_2(s), \quad \dots, \quad \frac{X_n}{X_{n-1}} = W_n(s),$$

где $X_i = X_i(s)$ — изображения по Лапласу переменных $x_i(t)$. Передаточная функция всей цепи, по определению, будет

$$W(s) = \frac{X_n(s)}{X(s)}.$$

Если перемножить между собой все левые части и все правые части написанных равенств, получим искомый результат

$$\frac{X_n}{X} = W_1(s) W_2(s) \dots W_n(s),$$

так как все промежуточные переменные X_i при таком перемножении сокращаются.

Следовательно,

$$W(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s), \quad (2.1)$$

т. е. передаточная функция разомкнутой цепи последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций всех звеньев.

2. Цепь из параллельно соединенных звеньев (рис. 2.2). Пусть заданы передаточные функции звеньев

$$\frac{X_i}{X} = W_i(s) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Поскольку выходная величина цепи равна

$$y = \sum_{i=1}^n x_{i\tau}$$

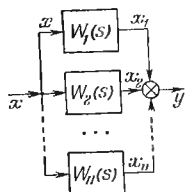


Рис. 2.2

то и передаточная функция цепи получит вид

$$W(s) = \frac{Y}{X} = \sum_{i=1}^n W_i(s), \quad (2.2)$$

т. е. передаточная функция разомкнутой цепи из параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций всех звеньев.

3. Цепь с местной обратной связью (рис. 2.3). Запишем сначала передаточную функцию звена, охваченного

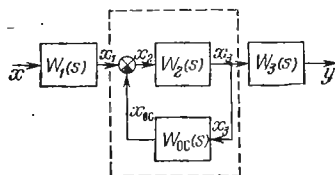


Рис. 2.3

обратной связью (часть схемы, обведенная на рис. 2.3 пунктиром).

Обратная связь называется отрицательной, если (см. рис. 2.3)

$$x_2 = x_1 - x_{oc}.$$

Согласно схеме имеем в изображениях по Лапласу

$$X_2 = X_1 - X_{oc}, \quad X_{oc} = W_{oc}(s) X_3.$$

Но далее

$$X_3 = W_2(s) X_2 = W_2(s) [X_1 - W_{oc}(s) X_3].$$

Отсюда получаем

$$\frac{X_3}{X_1} = \frac{W_2(s)}{1 + W_{oc}(s)W_2(s)}.$$

Перемножив правую часть данного выражения с передаточными функциями остальных звеньев цепи (согласно формуле (2.1)), получаем окончательную формулу

$$W(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 + W_{oc}(s)W_2(s)}, \quad (2.3)$$

т. е. передаточная функция разомкнутой цепи с местной отрицательной обратной связью равна произведению передаточных функций всех звеньев прямой цепи, деленному на единицу плюс произведение передаточной функции обратной связи на передаточную функцию охватываемого ею звена.

Если в той же схеме (рис. 2.3) местная обратная связь будет положительной, т. е. если $x_2 = x_1 + x_{oc}$, то получим

$$W(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 - W_{oc}(s)W_2(s)}.$$

Отличие заключается в знаке второго слагаемого знаменателя. Это, как увидим потом, весьма важно. Главное применение в автоматических системах имеют отрицательные обратные связи.

В общем случае, сложная разомкнутая цепь звеньев может включать в себя комбинации всех трех рассмотренных случаев. Пользуясь полученными здесь формулами, можно составлять общую передаточную функцию и для более сложных цепей (см. об этом ниже § 2.2).

Общий коэффициент усиления разомкнутой цепи. Целесообразно, как и для отдельного звена, передаточную функцию всей разомкнутой цепи в целом $W(s)$ приводить к стандартному виду

$$W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)},$$

где $N(s)$ и $L(s)$ — многочлены с единичными коэффициентами при младших членах. Выносимый при этом множитель K явится общим коэффициентом усиления всей разомкнутой цепи звеньев. Согласно записанным выше формулам получим:

а) для цепи из последовательно соединенных звеньев (рис. 2.1)

$$K = k_1 k_2 \dots k_n, \quad (2.4)$$

где k_i — коэффициенты усиления отдельных звеньев;

б) для цепи из параллельно соединенных *позиционных* звеньев (рис. 2.2)

$$K = k_1 + k_2 + \dots + k_n; \quad (2.5)$$

в) для цепи с отрицательной местной обратной связью (рис. 2.3) в случае, если звенья W_2 и W_{oc} — *позиционные*,

$$K = \frac{k_1 k_2 k_3}{1 + k_{oc} k_2}, \quad (2.6)$$

а при положительной местной обратной связи

$$K = \frac{k_1 k_2 k_3}{1 - k_{oc} k_2}.$$

В случае наличия *непозиционных* звеньев формулы (2.5) и (2.6) изменятся (см. гл. 6).

Заметим, что степень числителя $KN(s)$ передаточной функции разомкнутой цепи звеньев в реальных системах обычно ниже степени знаменателя $L(s)$.

Дифференциальное уравнение разомкнутой цепи будет

$$L(p)y = KN(p)x, \quad (2.7)$$

а характеристическое уравнение —

$$L(\lambda) = 0. \quad (2.8)$$

Частотные характеристики разомкнутой цепи звеньев. Рассмотрим получение частотных характеристик на примере, из которого будет ясен общий метод. Пусть задана передаточная функция разомкнутой цепи в виде

$$W(s) = \frac{K (\tau_1 s + 1) (\tau_2 s + 1)}{s (T_1 s + 1) (T_2^2 s^2 + 2\zeta T_2 s + 1) (T_3 s + 1)},$$

причем $\zeta = 0,6$ (при таком ζ можно будет не учитывать «горба» амплитудной частотной характеристики колебательного звена).

Амплитудная и фазовая частотные характеристики имеют вид

$$A = \frac{K}{\omega} \sqrt{\frac{(\tau_1^2 \omega^2 + 1)(\tau_2^2 \omega^2 + 1)}{(T_1^2 \omega^2 + 1)[(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + 4\zeta^2 T_2^2 \omega^2](T_3^2 \omega^2 + 1)}}$$

$$\varphi = -90^\circ + \arctg \tau_1 \omega + \arctg \tau_2 \omega -$$

$$- \arctg T_1 \omega - \arctg \frac{2\zeta T_2 \omega}{1 + T_2^2 \omega^2} - \arctg T_3 \omega.$$

Их можно изобразить графически (рис. 2.4), а по ним — построить и амплитудно-фазовую частотную характеристику (рис. 2.5).

Логарифмическую амплитудно-частотную характеристику можно строить непосредственно по заданной передаточной функции. Для этого надо помнить, что, согласно характеристикам типовых звеньев (см. главу 1),

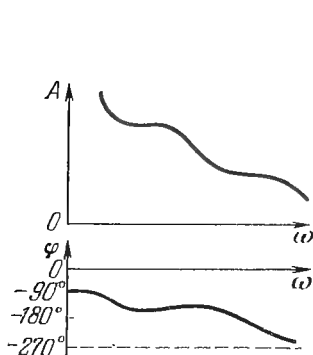


Рис. 2.4

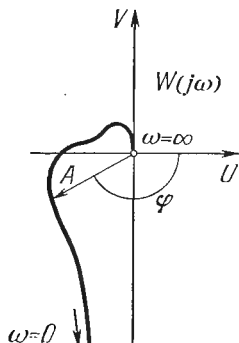


Рис. 2.5

каждому сомножителю типа $(Ts + 1)$ в знаменателе соответствует точка излома характеристики при $\omega = \frac{1}{T}$ с последующим наклоном -20 дБ/дек., а каждому сомножителю такого же типа в числителе соответствует точка излома при $\omega = \frac{1}{\tau}$ с последующим наклоном $+20$ дБ/дек. Сомножителю же типа $(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)$ в знаменателе соответствует излом при $\omega = \frac{1}{T}$ с наклоном -40 дБ/дек, если $0,5 < \zeta < 1$. При $\zeta < 0,5$ нужно добавочно строить «горб», вычислив превышение H (см. § 1.2).

Таким образом, пронумеровав по порядку все сомножители передаточной функции:

$$W(s) = \frac{\overset{1}{K} (\overset{2}{\tau_1 s + 1}) (\overset{3}{\tau_2 s + 1})}{\underset{4}{s} (\underset{5}{T_1 s + 1}) (\underset{6}{T_2^2 s^2 + 2\zeta T_2 s + 1}) (\underset{7}{T_3 s + 1})},$$

для каждого из них получим характеристики, показанные на рис. 2.6, а и обозначенные там цифрами в кружках:

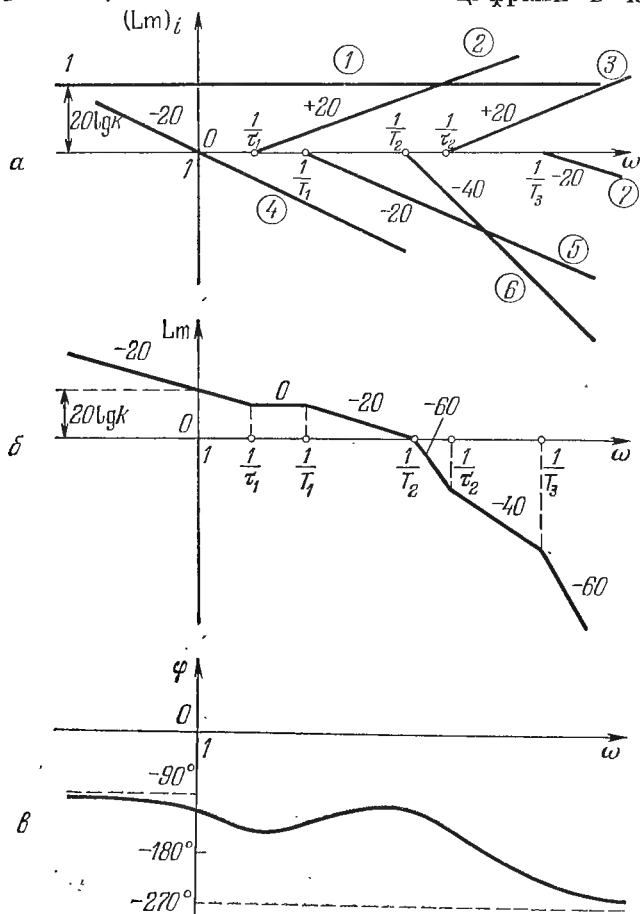


Рис. 2.6

ках. Простое сложение их дает искомую логарифмическую амплитудную частотную характеристику $Lm(\omega)$

данной разомкнутой цепи звеньев, показанную на рис. 2.6, б. На рис. 2.6, в согласно написанной выше формуле изображена фазовая частотная характеристика $\varphi(\omega)$.

Из рис. 2.6 видно, что легко можно строить непосредственно суммарную характеристику $L_m(\omega)$ по передаточной функции $W(s)$ (помня указанное выше правило изломов), не изображая отдельных частей характеристики (т. е. можно обойтись без рис. 2.6, а). При этом частоты в точках изломов $\left(\frac{1}{T_1}, \frac{1}{T_1}, \dots\right)$ называются *сопрягающими частотами*.

При более сложных формах передаточной функции $W(s)$, например, при наличии внутренних обратных связей, построение ЛАХ усложняется. Однако часто можно и сложные формулы приводить к аналогичному виду, разложив на множители многочлены числителя и знаменателя (с заданными числовыми коэффициентами). Имеются и другие инженерные приемы.

Для любой разомкнутой цепи звеньев, как ранее делалось для отдельного звена, можно определить также переходные и весовые функции.

§ 2.2. Структурные преобразования

Для удобства расчетов автоматических систем бывает необходимо преобразовать структурную схему системы к какому-либо желаемому виду. Например, для построения логарифмических частотных характеристик, как мы видели, наиболее удобно иметь цепь последовательно соединенных звеньев.

Приведем здесь некоторые простейшие правила, пользуясь которыми можно производить преобразования структуры разомкнутой цепи системы автоматического управления к желаемому виду.

1. Можно использовать *любую из трех формул* (2.1), (2.2), (2.3) для разных случаев соединения звеньев. Пусть, например, задана структурная схема цепи звеньев в виде рис. 2.7. Тогда, пользуясь формулами (2.2) и (2.3), ее можно преобразовать к цепи последовательно соединенных звеньев (рис. 2.8), где

$$W_8(s) = W_3(s) + W_4(s), \quad W_9(s) = \frac{W_6(s)}{1 + W_{oc}(s)W_6(s)}$$

а затем написать и общую передаточную функцию всей цепи

$$W(s) = W_1(s) W_2(s) W_3(s) W_4(s) W_5(s) W_6(s) W_7(s).$$

2. Можно формально *переносить внешнее воздействие вперед или назад по цепи* таким образом, чтобы не менялась передача сигнала на выход этой цепи. Например,

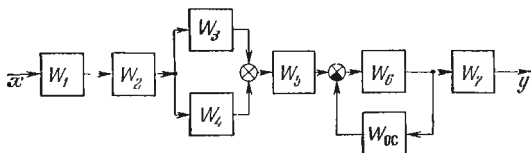


Рис. 2.7

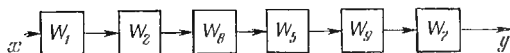


Рис. 2.8

если внешнее воздействие приложено как показано на рис. 2.9, а, то его можно перенести по цепи вперед, добавив передаточную функцию тех звеньев, через которые сделан перенос (W_2 , рис. 2.9, б).

При переносе внешнего воздействия по цепи назад следует добавлять передаточную функцию, обратную передаточной функции звеньев, через которые сделан перенос ($\frac{1}{W_1}$, рис. 2.9, в).

Очевидно, что пользуясь этими правилами, мы сохраняем передачу сигнала от внешнего воздействия f на выход системы.

3. Последовательно соединенные звенья можно *менять местами* без изменения общей передаточной функции цепи. Это следует из формулы (2.1).

4. Можно производить перенос звена *параллельного контура* вперед или назад по цепи с соответствующими добавлениями. Например, разветвление к звену W_3 параллельного контура в схеме рис. 2.10, а можно перенести вперед по цепи, добавив передаточную функцию, об-

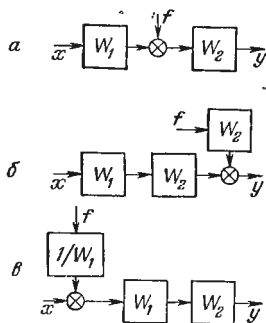


Рис. 2.9

ратную передаточной функции звеньев, через которые был сделан перенос ($\frac{1}{W_2}$, рис. 2.10, б).

При переносе же его по цепи назад надо добавить передаточную функцию тех звеньев, через которые был сделан перенос (W_1 , рис. 2.10, в).

5. Переноса место включения звена обратной связи W_{oc} (рис. 2.11, а) вперед или назад, поступаем точно

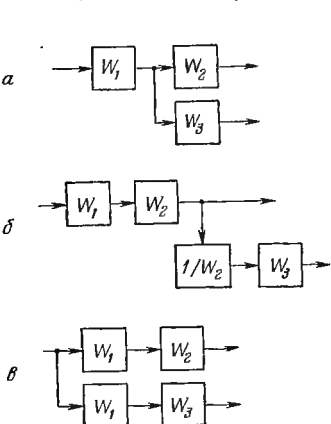


Рис. 2.10

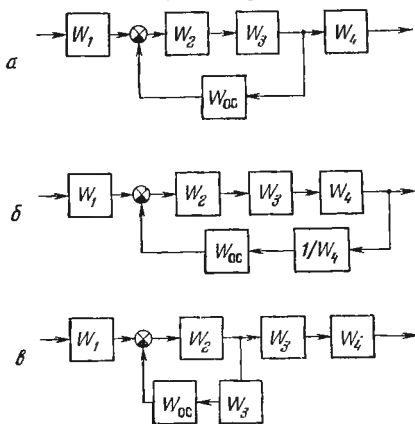


Рис. 2.11

так же, как и в предыдущем случае (соответственно рис. 2.11, б и в).

Ограничимся этими основными правилами структурных преобразований. По аналогии с ними можно произ-

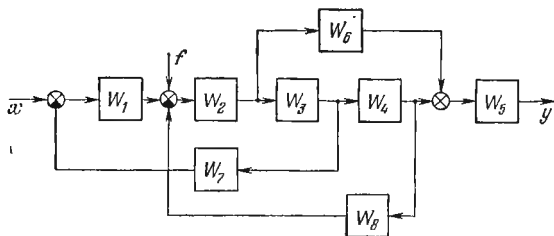


Рис. 2.12

водить желаемые преобразования любых структурных схем.

Приведем пример получения общей передаточной функции сложной разомкнутой цепи (рис. 2.12) с использованием структурных преобразований.

Первый шаг преобразования показан на рис. 2.13, где, согласно правилам 4 и 5, имеем

$$W_9(s) = \frac{W_6(s)}{W_3(s)}, \quad W_{10}(s) = W_4(s) W_8(s)$$

и, кроме того, по правилу 2 сделав перепос назад внешнего воздействия f .

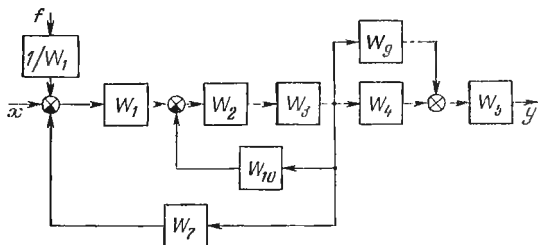


Рис. 2.13

Второй шаг преобразования изображен на рис. 2.14, где, согласно правилу 1, получаем

$$W_{11}(s) = \frac{W_1(s) W_2(s) W_3(s)}{1 + W_{10}(s) W_2(s) W_3(s)} = \frac{W_1(s) W_2(s) W_3(s)}{1 + W_2(s) W_3(s) W_4(s) W_8(s)}$$

$$W_{12}(s) = W_4(s) + W_9(s) = \frac{W_3(s) W_4(s) + W_6(s)}{W_3(s)}.$$

Наконец, на основании схемы рис. 2.14 находим окончательно общие передаточные функции всей разомкнутой

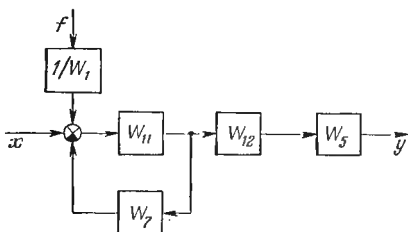


Рис. 2.14

цепи по каждой из двух входных величин x и f отдельно

$$W_x(s) = \frac{Y}{X} = \frac{W_{11}(s) W_{12}(s) W_5(s)}{1 + W_7(s) W_{11}(s)},$$

$$W_f(s) = \frac{Y}{F} = \frac{W_{11}(s) W_{12}(s) W_5(s)}{W_1(s) [1 + W_7(s) W_{11}(s)]}.$$

Аналогично этому примеру можно производить структурные преобразования, приводя к желаемым простым видам любые сложные структуры самых различных систем.

§ 2.3. Передаточные функции и уравнения замкнутой системы

Из цепи звеньев любой сложности, показанной здесь одним прямоугольником (рис. 2.15), получается замкнутая система при помощи единичной отрицательной обратной связи. Эту обратную связь называют *главной* в отличие от местных обратных связей, которые могут быть, как мы видели, внутри в составе разомкнутой цепи звеньев. Пусть имеются (рис. 2.15) внешние воздействия: $g(t)$ — задающее и $f(t)$ — возмущающее. В общем случае могут быть введены несколько возмущающих воздействий, приложенных в разных местах системы.

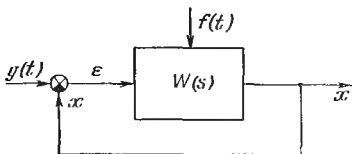


Рис. 2.15

Введены несколько возмущающих воздействий, приложенных в разных местах системы.

Задача передаточная функция разомкнутой цепи

$$\frac{X}{E} = W(s) \quad (2.9)$$

в виде отношения многочленов с единичными коэффициентами при младших членах, т. е.

$$W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)}, \quad (2.10)$$

где K — общий коэффициент усиления разомкнутой цепи.

Передаточные функции замкнутой системы записываются отдельно для каждой комбинации входа и выхода, а значит, и для каждого внешнего воздействия в отдельности.

Разделим каналы прохождения сигналов в системе от каждого внешнего воздействия. Возмущающее воздействие $f(t)$ может быть приложено в любом месте. Но, используя второе правило структурных преобразований (§ 2.2), всегда можно выделить ту часть схемы, через которую проходят сигналы от $f(t)$ на выход x . Это показано на рис. 2.16 в виде передаточной функции $M(s)$.

Для задающего воздействия $g(t)$ схема прохождения сигналов сохраняется в полном виде $W(s)$. На выходе имеем формально

$$x = x_1 + x_2$$

(на самом деле $M(s)$ входит в общую схему как часть $W(s)$).

Основные соотношения, следовательно, в изображениях по Лапласу будут иметь вид

$$E = G - X, \quad (2.11)$$

$$X = W(s)E + M(s)F. \quad (2.12)$$

В расчетах автоматических систем применяют три основных вида передаточных функций замкнутой системы.

1. Главная передаточная функция замкнутой системы (при $f(t) = 0$):

$$\Phi(s) = \frac{X}{G}.$$

Из формулы (2.11) и (2.12) при $F = 0$ имеем

$$X = W(s)(G - X),$$

откуда

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{KN(s)}{L(s) + KN(s)}. \quad (2.13)$$

Последнее вытекает из формулы (2.10).

2. Передаточная функция замкнутой системы для ошибки (при $f(t) = 0$):

$$\Phi_s(s) = \frac{E}{G}.$$

По формуле (2.11) получаем

$$\frac{E}{G} = \frac{G - X}{G} = 1 - \Phi(s),$$

откуда

$$\Phi_s(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{1}{L(s) + KN(s)}. \quad (2.14)$$

3. Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию (при $g(t) = 0$):

$$\Phi_f(s) = \frac{X}{F}.$$

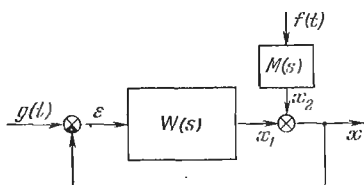


Рис. 2.16

Из формул (2.11) и (2.12) при $G=0$ имеем

$$X = W(s)(-X) + M(s)F,$$

откуда

$$\Phi_f(s) = \frac{M(s)}{1+W(s)} = \frac{R(s)}{L(s)+KN(s)} \quad (2.15)$$

где $R(s)=L(s)M(s)$, причем многочлен $R(s)$ зависит от места приложения возмущающего воздействия. Заметим, что поскольку при $g(t)=0$ имеем $E=-X$, то передаточная функция замкнутой системы для ошибки по возмущающему воздействию $\Phi_{ef}(s) = \frac{E}{F}$ будет той же, что и для регулируемой величины $\Phi_f(s)$ с точностью до знака.

Важно отметить, что знаменатель всех видов передаточной функции замкнутой системы один и тот же.

Для замкнутой системы в целом (рис. 2.15) имеем

$$X = \Phi(s)G + \Phi_f(s)F = \frac{W(s)}{1+W(s)}G + \frac{M(s)}{1+W(s)}F$$

или

$$X = \frac{KN(s)}{L(s)+KN(s)}G + \frac{R(s)}{L(s)+KN(s)}F.$$

Умножая все на общий знаменатель и переходя к оригиналам, получим дифференциальное уравнение замкнутой системы для регулируемой величины x в виде

$$[L(p)+KN(p)]x = KN(p)g(t) + R(p)f(t). \quad (2.16)$$

Итак, зная передаточные функции звеньев системы, можно чисто алгебраическим путем найти общее дифференциальное уравнение всей замкнутой системы в целом при любой ее сложности. В этом состоит, в частности, одно из важных практических преимуществ использования аппарата передаточных функций.

Фигурирующие здесь операторные многочлены $L(p)$ и $KN(p)$ соответствуют знаменателю и числителю передаточной функции разомкнутой цепи $W(s)$, а операторный многочлен $R(p)$ зависит от места приложения возмущающего воздействия $f(t)$.

Дифференциальное уравнение замкнутой системы (2.16) записывают также в виде

$$D(p)x = KN(p)g(t) + R(p)f(t), \quad (2.17)$$

где

$$D(p) = L(p) + KN(p). \quad (2.18)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы будет

$$D(\lambda) = 0 \quad \text{или} \quad L(\lambda) + KN(\lambda) = 0. \quad (2.19)$$

Очевидно, что корни λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) этого характеристического уравнения равны полюсам s_i передаточной функции замкнутой системы (2.13).

Как видим, порядок дифференциального уравнения замкнутой системы (2.17), как и разомкнутой цепи (2.7) определяется степенью n многочлена $L(p)$ (так как степень $N(p)$ ниже). Однако коэффициенты обоих уравнений существенно отличны друг от друга за счет прибавления многочлена $KN(p)$. Поэтому и все динамические свойства процессов в замкнутой системе будут существенно отличаться от таковых в разомкнутой цепи, состоящей из тех же самых звеньев.

В развернутом виде в обычной записи уравнение динамики замкнутой системы (2.17) получает вид

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f_1(t),$$

где

$$f_1(t) = b_0 \frac{d^m g(t)}{dt^m} + \dots + b_m g(t) + \beta_0 \frac{d^r f(t)}{dt^r} + \dots + \beta_r f(t).$$

На основании передаточных функций (2.14) и (2.15) с изменением знака последней можно выразить ошибку замкнутой системы, точнее ее изображение по Лапласу, в виде

$$E = \Phi_e(s)G - \Phi_f(s)F \quad (2.20)$$

и записать дифференциальное уравнение замкнутой системы для ошибки

$$[L(p) + KN(p)]\varepsilon = L(p)g(t) - R(p)f(t).$$

Здесь левая часть уравнения, а значит, и характеристическое уравнение, остаются теми же, что и для регулируемой величины (2.16). Правая же часть меняется существенно перед задающим воздействием, а перед возмущающим воздействием меняется только знак. Физически это понятно, ибо все изменения регулируемой величины под влиянием возмущающего воздействия включаются целиком в ошибку.

Уравнение замкнутой системы может быть записано и иначе — в виде системы уравнений звеньев типа (1.2),

но все соответствующие реальному физическому величинам воздействий между звеньями системы. Часть из них могут вводиться искусственно. Это фактически координаты математической модели системы.

Система уравнений (2.21) может быть записана в матричной форме

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (2.23)$$

а характеристическое уравнение (2.22) соответственно в виде

$$\det[A - \lambda E] = 0, \quad (2.24)$$

где x — вектор-столбец всех координат состояния, A — матрица коэффициентов, E — единичная матрица, т. е.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Согласно этим обозначениям краткая запись (2.23) расшифровывается подробно в виде (2.21), а запись (2.24) — в виде (2.22), что соответствует также другой краткой записи $D(\lambda) = 0$, примененной выше в (2.19).

§ 2.4. Частотные характеристики замкнутой системы

В соответствии с главной передаточной функцией замкнутой системы (2.13) можем записать формулу амплитудно-фазовой частотной характеристики замкнутой системы в виде

$$\Phi(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)}, \quad (2.25)$$

причем

$$W(j\omega) = \frac{KN(j\omega)}{L(j\omega)}$$

представляет собой выражение амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой цепи для данной системы.

Амплитудно-фазовые частотные характеристики можно представить в виде

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

$$\Phi(j\omega) = A_s(\omega) e^{j\varphi_s(\omega)},$$

где $A_3(\omega)$ и $\varphi_3(\omega)$ — соответственно амплитудная и фазовая частотные характеристики замкнутой системы. Последние можно выразить через $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ разомкнутой цепи.

Согласно формуле (2.25) имеем

$$A_3 e^{j\varphi_3} = \frac{A e^{j\varphi}}{1 + A e^{j\varphi}}$$

или, взяв обратные величины слева и справа, получим новое равенство

$$\frac{e^{-j\varphi_3}}{A_3} = \frac{e^{-j\varphi}}{A} + 1.$$

Подставим сюда $e^{j\varphi} = \cos \varphi - j \sin \varphi$ и приравняем затем отдельно вещественные и мнимые части. Получим два равенства

$$\frac{\cos \varphi_3}{A_3} = \frac{\cos \varphi}{A} + 1, \quad \frac{\sin \varphi_3}{A_3} = \frac{\sin \varphi}{A}.$$

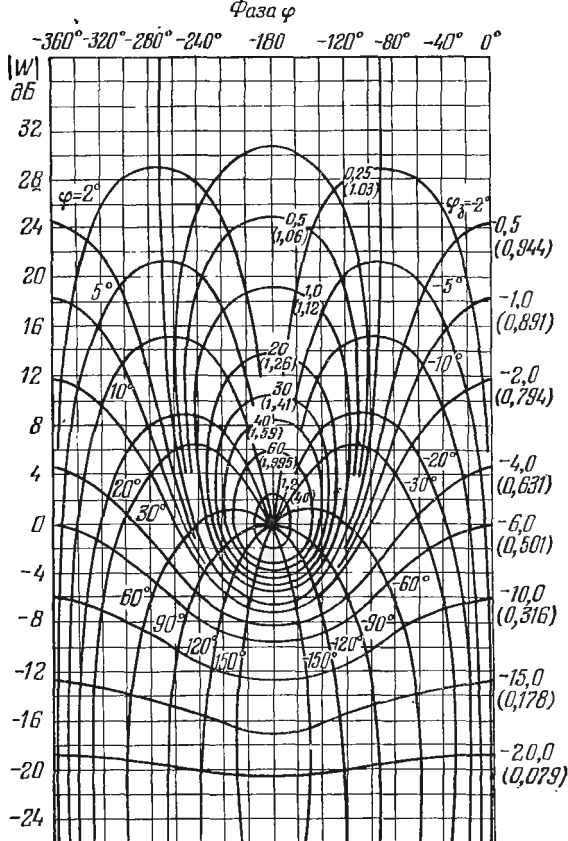
Сложив сначала квадраты этих выражений, а затем поделив одно из них на другое, получим искомый результат

$$A_3(\omega) = \frac{A(\omega)}{\sqrt{A^2(\omega) + 2A(\omega) \cos \varphi(\omega) + 1}}, \quad (2.26)$$

$$\varphi_3(\omega) = \arctg \frac{\sin \varphi(\omega)}{A(\omega) + \cos \varphi(\omega)}.$$

Для разомкнутой цепи, как мы знаем, чаще всего используются логарифмические частотные характеристики $Lm(\omega)$, $\varphi(\omega)$.

Будем считать, что из предыдущей начальной стадии расчета системы эти характеристики известны. Они будут исходными для определения по формулам (2.26) характеристик замкнутой системы $A_3(\omega)$ и $\varphi_3(\omega)$. Чтобы не иметь дело на практике с такими формулами, составлены [36] номограммы замыкания (рис. 2.17). Отложив на осях абсцисс и ординат заданные значения $\varphi(\omega)$ и $Lm(\omega)$, находим значения $A_3(\omega)$ и $\varphi_3(\omega)$ на поле номограммы в точке с этими координатами. Таким образом, по точкам строится вся частотная характеристика замкнутой системы.



Существует и другое представление частотной характеристики замкнутой системы

$$\Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ называются вещественной и мнимой частотными характеристиками. Представив исходную амплитудно-фазовую частотную характеристику разомкнутой цепи системы в виде

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

и подставив ее в формулу (2.25), найдем

$$P(\omega) = \frac{U(\omega)[1 + U(\omega)] + V^2(\omega)}{[1 + U(\omega)]^2 + V^2(\omega)},$$

$$Q(\omega) = \frac{V(\omega)}{[1 + U(\omega)]^2 + V^2(\omega)}.$$
(2.27)

Линии $P = \text{const}$ и $Q = \text{const}$ оказываются окружностями на плоскости (U, V) . На основании этого строится

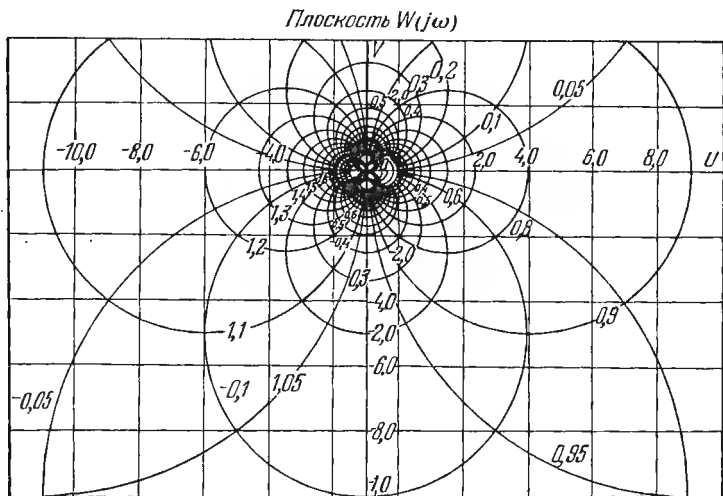


Рис. 2.18

[36] круговая диаграмма (рис. 2.18). Наложив на поле этой диаграммы заданную амплитудно-фазовую частотную характеристику разомкнутой цепи $W(j\omega)$, построенную в координатах U и V , в точках пересечения ее с окружностями $P = \text{const}$ и $Q = \text{const}$ получим значения вещественной $P(\omega)$ и мнимой $Q(\omega)$ частотных характеристик замкнутой системы.

Вещественная характеристика $P(\omega)$ является четной, а мнимая $Q(\omega)$ нечетной функциями ω (рис. 2.19).

Наконец, вещественную и мнимую частотные характеристики замкнутой системы можно определять и по заданным логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой цепи. Для этого подставим выражение

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

в формулу (2.25). Получим

$$\Phi(j\omega) = \frac{A(\omega) [\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)]}{1 + A(\omega) [\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)]}.$$

Выделяя вещественную и мнимую части, найдем

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{A(\omega) [A(\omega) + \cos \varphi(\omega)]}{A^2(\omega) + 2A(\omega) \cos \varphi(\omega) + 1}, \\ Q(\omega) &= \frac{A(\omega) \sin \varphi(\omega)}{A^2(\omega) + 2A(\omega) \cos \varphi(\omega) + 1}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

На базе исходных логарифмических частотных характеристик, по этим формулам построены также [36] соответствующие номограммы для вещественной $P(\omega)$ и мнимой $Q(\omega)$ характеристик.

Все рассмотренные частотные характеристики замкнутой системы базировались на выражении главной передаточной функции, когда входом является задающее воздействие $g(t)$, а выходом — регулируемая величина x .

Аналогичным путем могут быть построены частотные характеристики замкнутой системы по возмущающему воздействию $f(t)$, для чего надо пользоваться соответствующей передаточной функцией

$$\Phi_f(s) = \frac{R(s)}{L(s) + KN(s)} \text{ при } s = j\omega.$$

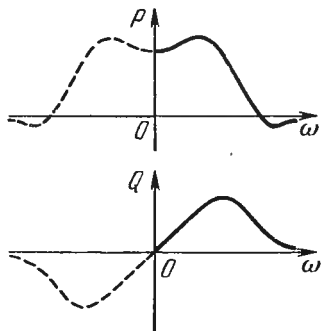


Рис. 2.19

При этом очертание частотных характеристик будет зависеть от вида многочлена $R(s)$, т. е. от места приложения возмущающего воздействия $f(t)$.

ТОЧНОСТЬ И ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 3.1. Процесс управления и требования к нему

Процесс управления во времени определяется решением дифференциального уравнения динамики замкнутой системы, полученного в разных формах записи в § 2.3. Это решение для регулируемой величины имеет вид

$$x(t) = x_{\text{соб}}(t) + x_{\text{вын}}(t), \quad (3.1)$$

где собственное движение $x_{\text{соб}}(t)$ определяется общим решением соответствующего однородного уравнения при заданных начальных условиях

$$x(0), \dot{x}(0), \dots, x^{(n-1)}(0), \quad (3.2)$$

а вынужденное движение $x_{\text{вын}}(t)$ — частным решением уравнения, отвечающим заданной правой части, т. е. задающему и возмущающему воздействиям и их производным.

Если уравнения динамики системы записаны в нормальной форме Коши (2.21), то начальные условия процесса управления вместо (3.2) задаются в виде начальных значений всех координат состояния

$$x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0), \quad (3.3)$$

а решение для процесса управления получает вид

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t). \quad (3.4)$$

Одна из этих координат состояния будет представлять регулируемую величину $x(t)$, а остальные соответствуют внутренним переменным в цепи звеньев или их комбинациям.

Первая часть решения (3.1) имеет вид

$$x_{\text{соб}} = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}, \quad (3.5)$$

если все корни λ_i характеристического уравнения $D(\lambda) = 0$ различны. Постоянные C_i определяются по начальным условиям.

Эта часть решения представляет собой *переходный процесс* в замкнутой системе управления. Значения постоянных C_i определяются после добавления частного решения $x_{\text{вын}}(t)$, т. е. в полном решении (3.1). Поэтому форма переходного процесса будет зависеть не только от корней λ_i (хотя эта зависимость *основная*), но еще в некоторой степени и от вида заданной правой части, т. е. от внешних воздействий $g(t)$ и $f(t)$ и от коэффициентов операторных многочленов $KN(p)$ и $R(p)$ (см. § 2.3).

Другими словами, форма переходного процесса зависит не только от полюсов ($s_i = \lambda_i$) передаточных функций замкнутой системы (2.13) и (2.15):

$$\Phi(s) = \frac{KN(s)}{D(s)}, \quad \Phi_f(s) = \frac{R(s)}{D(s)},$$

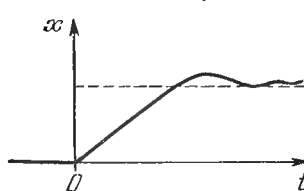
но еще и от нулей этих передаточных функций.

В случае наличия кратных корней в характеристическом уравнении $D(\lambda) = 0$ решение вместо (3.5) имеет вид

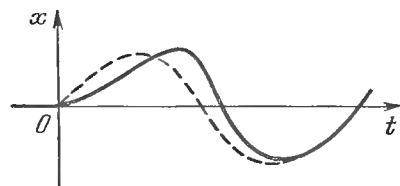
$$x_{\text{соб}} = \sum_{i=1}^k C_i P_i(t) e^{\lambda_i t}, \quad (3.6)$$

где $P_i(t)$ — многочлен степени $l_i - 1$, если l_i — кратность корня, а через k обозначено число различных корней λ_i . В реальных системах автоматического управления и регулирования кратность корней маловероятна.

Вторая часть решения (3.1) $x_{\text{вын}}(t)$, отвечающая правой части дифференциального уравнения динамики замкнутой системы (2.17), представляет собой *установившуюся часть процесса управления*. На нее накладывается



a



б

Рис. 3.1

переходный процесс (3.5), который теоретически длится бесконечно, но его влияние практически становится ничтожным через конечное время. После затухания переходной составляющей устанавливается процесс $x_{\text{вын}}(t)$. Это проиллюстрировано, например, на рис. 3.1 для случаев

постоянного (а) и синусоидального (б) внешнего воздействия.

Таким образом, формой установившегося процесса $x_{\text{вын}}(t)$ определяется *точность системы автоматического управления*. При этом *установившаяся ошибка системы* будет

$$\varepsilon_{\text{yc}}(t) = x_{\text{вын}}(t) - g(t), \quad (3.7)$$

а полное значение ошибки, существенное для начала процесса, равно

$$\varepsilon(t) = x(t) - g(t).$$

Решение для установившегося процесса управления можно записать в виде интегралов свертки

$$x_{\text{вын}}(t) = \int_0^t g(t - \tau) k_x(\tau) d\tau + \int_0^t f(t - \tau) k_f(\tau) d\tau, \quad (3.8)$$

где $k_x(\tau)$ и $k_f(\tau)$ — весовые функции замкнутой системы, т. е. ее реакции, взятые в точке выхода $x(t)$, на единичный мгновенный импульс $\delta(t)$, приложенный соответственно в точках приложения $g(t)$ и $f(t)$.

В результате, с точки зрения протекания процесса управления, требования к системе формируются по следующим трем основным направлениям:

- 1) точность;
- 2) устойчивость;
- 3) качество переходного процесса.

Каждое из них будет рассмотрено отдельно в трех ближайших главах.

Точность системы задается и определяется в установившихся режимах. Устойчивость гарантирует затухание переходного процесса, после чего обеспечивается желаемое качество затухающего переходного процесса.

Для нахождения решения (3.1), определяющего протекание процесса управления, применяются различные способы:

- а) классическое математическое решение;
- б) операционный метод;
- в) численные и графические способы;
- г) с помощью вычислительных машин (ЦВМ и АВМ).

Все эти способы решения дифференциальных уравнений изучаются в соответствующих курсах. Поэтому они здесь не излагаются.

Приведем только две формулы решения операционным методом.

При нулевых начальных условиях имеем изображение выходной величины замкнутой системы

$$X(s) = \Phi(s) G(s) + \Phi_f(s) F(s).$$

Найдем процесс управления при одном внешнем воздействии $G(s)$:

$$X(s) = \frac{KN(s)}{D(s)} G(s), \quad D(s) = L(s) + KN(s).$$

Если $g(t) = \delta(t)$ — единичный мгновенный импульс, то $G(s) = 1$ и решение будет

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \frac{KN(s_i)}{D'(s_i)} e^{s_i t} \quad (t > 0), \quad (3.9)$$

где s_i полюсы передаточной функции замкнутой системы, т. е. корни многочлена $D(s)$, в предположении отсутствия кратных полюсов; D' — производная по s .

Если же $g(t) = 1(t)$ — единичный скачок, то $G(s) = \frac{1}{s}$ и решение будет

$$x(t) = \frac{KN(0)}{D(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{KN(s_i)}{s_i D'(s_i)} e^{s_i t} \quad (t > 0). \quad (3.10)$$

В этих формулах все постоянные интегрирования уже определены через значения многочленов, входящих в передаточную функцию замкнутой системы. Здесь также видно, что форма переходного процесса в основном определяется значениями полюсов s_i (т. е. корнями характеристического уравнения замкнутой системы), но в некоторой степени она зависит и от числителя передаточной функции $KN(s)$, т. е. от правой части дифференциального уравнения.

§ 3.2. Постоянные ошибки. Астатические системы

Среди типовых режимов работы системы автоматического управления, определяющих точность этой системы, простейшими являются режимы работы при постоянной величине внешнего воздействия и при изменении внешнего воздействия с постоянной скоростью.

Найдем значение установившейся ошибки в замкнутой системе автоматического управления при постоянной величине внешнего задающего воздействия

$$g(t) = \text{const} = g_0.$$

Пусть задана передаточная функция разомкнутой цепи

$$W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)},$$

где $N(s)$ и $L(s)$ не содержит множителя s (свободные члены их равны единице).

Тогда передаточная функция замкнутой системы для ошибки будет равна

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{L(s)}{L(s) + KN(s)}, \quad (3.11)$$

а дифференциальное уравнение —

$$[L(p) + KN(p)] \varepsilon = L(p) g(t) \quad \left(p = \frac{d}{dt} \right). \quad (3.12)$$

Согласно теореме о конечном значении, выражение установившейся ошибки принимает вид

$$\varepsilon_{yc} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_e(s) G(s) s, \quad (3.13)$$

где в данном случае

$$G(s) = \frac{g_0}{s}.$$

По этой формуле с учетом (3.11) получаем

$$\varepsilon_{yc} = \frac{g_0}{1 + K},$$

так как свободные члены многочленов $N(s)$ и $L(s)$ равны единице.

Это значение ошибки называется *статической ошибкой*;

$$\varepsilon_{ст} = \frac{g_0}{1 + K}. \quad (3.14)$$

Ее можно столь же просто получить из дифференциального уравнения (3.12) как частное решение при $g(t) = g_0$.

Если же подавать на вход системы задающее воздействие, изменяющееся с постоянной скоростью,

$$g(t) = g_0 + g_1 t, \quad (3.15)$$

то и установившаяся ошибка ε как частное решение уравнения (3.12) тоже будет изменяться с постоянной скоростью. При достаточно длительном воздействии такое нарастание ошибки недопустимо.

Для ликвидации этого явления нужно изменить структуру системы так, чтобы многочлен $L(s)$ не имел свободного члена, т. е. чтобы

$$L(s) = sL_1(s); \quad (3.16)$$

другими словами, передаточная функция разомкнутой цепи этой системы $W(s)$ должна иметь нулевой полюс.

В самом деле, при воздействии $g(t) = g_0 + g_1 t$, изображение которого

$$G(s) = \frac{g_0}{s} + \frac{g_1}{s^2},$$

по формуле (3.13) с учетом (3.11) и (3.16) получим

$$\varepsilon_{yc} = \frac{g_1}{K}.$$

Следовательно, в такой системе при задающем воздействии с постоянной скоростью не будет нарастающей ошибки. Это постоянное значение ошибки называется *скоростной ошибкой*

$$\varepsilon_{ск} = \frac{g_1}{K}. \quad (3.17)$$

То же самое легко можно получить из дифференциального уравнения системы (3.12) при условии $L(p) = pL_1(p)$, как частное решение, учитывая, что при воздействии (3.15) имеем

$$pg(t) = g_1.$$

При постоянном же задающем воздействии $g(t) = \text{const} = g_0$ в такой системе установившаяся ошибка будет равна нулю ($\varepsilon_{ст} = 0$).

Итак, система, обладающая свойством (3.16), т. е. нулевым полюсом в передаточной функции разомкнутой цепи $W(s)$, не будет иметь статической ошибки и даст постоянное значение скоростной ошибки.

Такая система, отличающаяся отсутствием статической ошибки, называется *астатической системой* в отличие от системы, не имеющей нулевого полюса в разомкнутом состоянии и обладающей вследствие этого статической ошибкой.

Относительно технических средств, с помощью которых достигается астатизм системы, речь будет ниже в главе 6. Здесь можно только, вспоминая передаточные функции типовых звеньев (глава 1), сказать, что для этого необходимо присутствие интегрирующего звена.

Очевидно, что все следящие системы и системы программного управления, имеющие дело с переменным задающим воздействием, должны проектироваться как астатические. В системах же автоматического регулирования, настраиваемых на поддержание постоянного значения регулируемой величины, допустимо иметь и статические ошибки (астатизма не требуется).

В следящей системе (рис. 3.2) интегрирующим звеном, создающим астатизм, является сам исполнительный

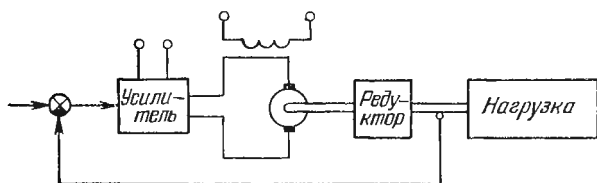


Рис. 3.2

электродвигатель. В самом деле, угловая скорость вала двигателя в установившемся режиме пропорциональна величине управляющего напряжения на входе. Поэтому угол поворота вала (выходная величина системы) будет пропорционален интегралу от входного управляющего напряжения.

Как видно из формул ошибок (3.14) и (3.17), для уменьшения величины ошибки нужно добиваться достаточно большого значения общего коэффициента усиления K разомкнутой цепи проектируемой системы. Поэтому величина K именуется *добротностью системы*.

Можно строить системы автоматического управления также с астатизмом второго и более высокого n -го порядка, когда многочлен $L(s)$ имеет вид соответственно

$$L(s) = s^2 L_1(s), \quad L(s) = s^n L_1(s), \quad (3.18)$$

т. е. с двойным нулевым или нулевым полюсом ν -го порядка в передаточной функции $W(s)$ разомкнутой цепи.

Тогда, если мы возьмем задающее воздействие в виде

$$g(t) = g_0 + g_1 t + \dots + g_{\nu-1} t^{\nu-1} + g_{\nu} t^{\nu}, \quad (3.19)$$

для которого имеем изображение

$$G(s) = \frac{g_0}{s} + \frac{g_1}{s^2} + \dots + \frac{(\nu-1)! g_{\nu-1}}{s^{\nu}} + \frac{\nu! g_{\nu}}{s^{\nu+1}},$$

то по формуле (3.13) с учетом (3.11) и (3.18) в системе с астатизмом ν -го порядка получим постоянную ошибку

$$\varepsilon_{yc} = \frac{\nu! g_{\nu}}{K}, \quad (3.20)$$

а все первые ν членов задающего воздействия (3.19) будут иметь нулевую установившуюся ошибку.

Здесь рассматривалось свойство астатизма системы автоматического управления по отношению к задающему воздействию. Может идти речь и об астатизме системы по отношению к возмущающему воздействию. Если возмущающее воздействие $f(t)$ приложено в отличном от задающего $g(t)$ месте, то условие астатизма при этом будет другим.

Поскольку в этом случае отклонение регулируемой величины x обусловлено возмущающим воздействием, то надо будет пользоваться передаточной функцией замкнутой системы по возмущению

$$\Phi_f(s) = \frac{R(s)}{L(s) + KN(s)},$$

причем согласно (2.20) при $g(t) = 0$ получаем

$$\varepsilon_{yc} = -x_{yc} = -\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -\lim_{s \rightarrow 0} \Phi_f(s) s F(s),$$

или же дифференциальным уравнением

$$[L(p) + KN(p)]\varepsilon = -R(p)f(t).$$

Как видно, для астатизма системы по отношению к возмущающему воздействию потребуется наличие нулевых корней в многочлене $R(s)$.

§ 3.3. Точность при гармоническом воздействии

Установившиеся ошибки при гармоническом воздействии определяются частотными характеристиками замкнутой системы, которые были получены выше в § 2.4.

Частотные характеристики замкнутой системы, построенные для регулируемой величины x по возмущающему воздействию (см. в конце § 2.4), будут целиком определять *установившуюся синусоидальную ошибку* по амплитуде и по фазе

$$A_s(\omega) = A_x(\omega) = |\Phi_f(j\omega)|, \quad \varphi_s(\omega) = -\varphi_x(\omega) = -\arg \Phi_f(j\omega),$$

где ω — частота колебаний возмущающего воздействия

$$f(t) = \sin \omega t$$

(с единичной амплитудой).

Что касается основных частотных характеристик

$$A_s(\omega) = |\Phi(j\omega)|, \quad \varphi_s(\omega) = \arg \Phi(j\omega),$$

построенных в § 2.4 по главной передаточной функции замкнутой системы, то они включают в себя всю информацию об установившемся слежении за синусоидальным задающим воздействием

$$g(t) = \sin \omega t. \quad (3.21)$$

Поэтому, как показано на рис. 3.3, *а* и *б* (соответственно для систем с астатизмом и без него), *установив-*

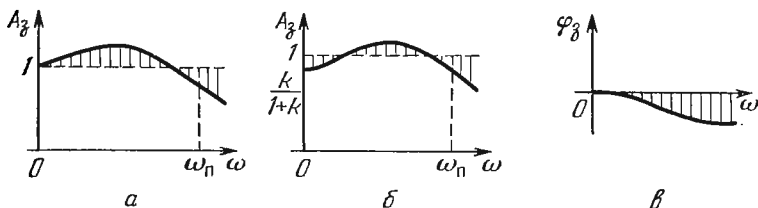


Рис. 3.3

шаяся ошибка воспроизведения амплитуды гармонического задающего воздействия определится заштрихованными частями ординат. Заметим, что *ошибка в амплитуде при $\omega = 0$ представляет собой статическую ошибку системы*, так как нулевая частота соответствует постоянной величине входного сигнала.

Фазовая частотная характеристика $\varphi_3(\omega)$ (рис. 3.3, в) представляет собой установившуюся ошибку, выражающуюся в сдвиге фазы на выходе

$$x = A_3(\omega) \sin(\omega t + \varphi_3(\omega))$$

по отношению к входному воздействию (3.21).

Амплитудная частотная характеристика $A_3(\omega)$ обычно падает при дальнейшем увеличении частоты, причем

$$A_3(\omega) \rightarrow 0 \text{ при } \omega \rightarrow \infty.$$

В результате получается ограниченный диапазон частот ω_n (см. рис. 3.3), в котором ошибка воспроизведения амплитуды

$$\Delta A_3 = 1 - A_3(\omega)$$

не превышает допустимого значения. Этот диапазон частот $0 < \omega < \omega_n$ определяет *полосу пропускания* данной системы.

Полоса пропускания является важным показателем точности системы. Она характеризует ограничение возможностей системы в воспроизведении быстро меняющихся сигналов. Это связано со степенью инерционности системы. При необходимости для снижения инерционности

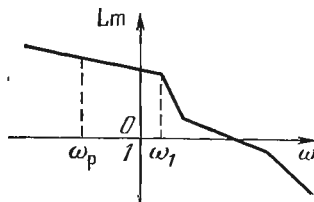


Рис. 3.4

в систему вводятся корректирующие устройства, рассматриваемые ниже в главе 6.

Для *астатических систем* существует приближенная формула вычисления ошибки при гармоническом воздействии на рабочих частотах. Рабочие частоты систем управления ω_p лежат обычно ниже (левее) первой сопрягающей частоты ω_1 (рис. 3.4), где $|W(j\omega_p)| \gg 1$ и само значение ω_p сравнительно невелико. Поэтому для астатической системы с передаточной функцией разомкнутой цепи

$$W(s) = \frac{KN(s)}{s^v L_1(s)},$$

где $L_1(s)$ — многочлен по степеням s со свободным членом 1, будем иметь

$$W(j\omega) = \frac{KN(j\omega)}{(j\omega)^v L_1(j\omega)} \approx \frac{K}{(j\omega_p)^v},$$

а для ошибки ε в замкнутой системе

$$\Phi_\varepsilon(j\omega) = \frac{1}{1+W(j\omega)} \approx \frac{(j\omega_p)^v}{K},$$

т. е. при воздействии (3.21) амплитуда ошибки будет равна

$$A_\varepsilon = |\Phi_\varepsilon(j\omega)| \approx \frac{\omega_p^v}{K}. \quad (3.22)$$

Здесь наглядно видно, что и при гармоническом воздействии ошибка в первом приближении обратно пропорциональна общему коэффициенту усиления разомкнутой цепи K , т. е. добротности системы, как это было и для всех постоянных ошибок (§ 3.2).

Наконец, необходимо отметить, что часто при проектировании и испытании систем управления пользуются синусоидальным задающим сигналом и в том случае, когда требования к системе поставлены по величинам максимальной скорости и максимального ускорения входного воздействия, которые должны воспроизводиться следящей системой.

В этом случае, при подаче синусоидального сигнала $g = a \sin \omega t$ скорость и ускорение будут

$$\dot{g} = a\omega \cos \omega t, \quad \ddot{g} = -a\omega^2 \sin \omega t.$$

Следовательно,

$$\dot{g}_{\max} = a\omega, \quad \ddot{g}_{\max} = a\omega^2.$$

Отсюда вычисляются частота ω и амплитуда a синусоидального задающего воздействия, при котором получают требуемые максимальные скорость и ускорение, а именно:

$$\omega = \frac{\ddot{g}_{\max}}{\dot{g}_{\max}}, \quad a = \frac{\dot{g}_{\max}^2}{\ddot{g}_{\max}}. \quad (3.23)$$

Тогда эти значения ω и a принимаются за расчетные рабочие значения частоты и амплитуды для данной си-

стемы. Ошибка на этой частоте при данной амплитуде определится по формуле

$$A_\varepsilon = a |\Phi_\varepsilon(j\omega)| = \left| \frac{a}{1+W(j\omega)} \right| \approx \frac{a}{|W(j\omega)|}. \quad (3.24)$$

Ниже в главе 6 мы воспользуемся этими соотношениями при решении задачи синтеза в процессе проектирования системы.

§ 3.4. Установившаяся ошибка при произвольном воздействии (коэффициенты ошибок)

В общем случае изображение ошибки $\varepsilon(t)$ воспроизведения задающего воздействия $g(t)$ выражается формулой

$$E(s) = \Phi_\varepsilon(s) G(s), \quad \Phi_\varepsilon(s) = \frac{1}{1+W(s)}.$$

Передаточную функцию можно (см. § 1.1) определить как преобразование Лапласа весовой функции

$$\Phi_\varepsilon(s) = \mathcal{L}\{k_\varepsilon(t)\} = \int_0^\infty k_\varepsilon(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad (3.25)$$

где $k_\varepsilon(t)$ — весовая функция для ошибки, т. е. реакция замкнутой системы в точке измерения ошибки (рассогласования) на мгновенный единичный импульс внешнего задающего воздействия $g(t) = \delta(t)$.

Величину установившейся ошибки при произвольной форме задающего воздействия (см. § 3.1) можно записать в виде

$$\varepsilon_{yc} = \int_0^t g(t-\tau) k_\varepsilon(\tau) d\tau = \int_0^\infty g(t-\tau) k_\varepsilon(\tau) d\tau. \quad (3.26)$$

Последнее выражение следует из того, что при $\tau > t$ аргумент функции $g(t-\tau)$ будет отрицательным, а при отрицательном значении $t-\tau$ принимается $g(t-\tau) = 0$. Поэтому замена конечного предела t бесконечным не меняет результата.

Разложим $g(t-\tau)$ в ряд:

$$g(t-\tau) = g(t) - \tau g'(t) + \frac{\tau^2}{2} g''(t) - \dots$$

$$\dots + \frac{(-\tau)^i}{i!} g^{(i)}(t) + \dots$$

Подставив это в соотношение (3.26), получим выражение вида

$$\varepsilon_{yc} = c_0 g(t) + c_1 g'(t) + \frac{c_2}{2} g''(t) + \dots + \frac{c_i}{i!} g^{(i)}(t) + \dots, \quad (3.27)$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \dots$ определяются из (3.26) следующим образом.

Очевидно,

$$c_0 = \int_0^{\infty} k_s(\tau) d\tau,$$

поэтому согласно формуле (3.25) имеем

$$c_0 = [\Phi_s(s)]_{s=0}. \quad (3.28)$$

Аналогично из (3.26) получаем

$$c_1 = \int_0^{\infty} (-\tau) k_s(\tau) d\tau$$

и согласно (3.25) находим

$$c_1 = \left[\frac{d\Phi_s}{ds} \right]_{s=0} \quad (3.29)$$

и т. д.

Общий член разложения (3.27) согласно (3.26) будет иметь коэффициент

$$c_i = \int_0^{\infty} (-\tau)^i k_s(\tau) d\tau$$

или на основании (3.25)

$$c_i = \left[\frac{d^i \Phi_s}{ds^i} \right]_{s=0}. \quad (3.30)$$

Итак, установившаяся ошибка при произвольном задающем воздействии $g(t)$ определяется формулой (3.27) с коэффициентами (3.28) — (3.30). Последние называются *коэффициентами ошибок*.

На практике ограничиваются небольшим конечным числом членов i .

Вычисление коэффициентов ошибок непосредственно по формулам (3.28) — (3.30) неудобно. Поэтому практически

применяется другой способ, который вытекает из следующего рассуждения.

Разложим передаточную функцию $\Phi_e(s)$ в ряд

$$\Phi_e(s) = [\Phi_e(s)]_{s=0} + \left[\frac{d\Phi_e}{ds} \right]_{s=0} s + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2\Phi_e}{ds^2} \right]_{s=0} s^2 + \dots + \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i\Phi_e}{ds^i} \right]_{s=0} s^i + \dots$$

Как видно, в этом разложении фигурируют выражения для коэффициентов ошибок (3.28) — (3.39). Следовательно,

$$\Phi_e(s) = c_0 + c_1 s + \frac{c_2}{2} s^2 + \dots + \frac{c_i}{i!} s^i + \dots \quad (3.31)$$

Но $\Phi_e(s)$ является отношением многочленов, т. е.

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{L(s)}{L(s) + KN(s)}. \quad (3.32)$$

Очевидно, что произведя простое деление многочлена числителя (3.32) на многочлен знаменателя по известному алгебраическому правилу, мы и получим выражение

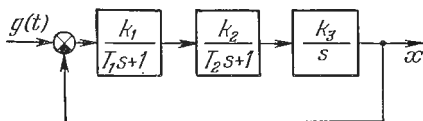


Рис. 3.5

типа (3.31), а значит, и значения всех коэффициентов ошибок.

После этого, подставив (3.31) в формулу

$$E(s) = \Phi_e(s)G(s)$$

и переходя к оригиналам, получим

$$e_{yc} = c_0 g(t) + c_1 g'(t) + \frac{c_2}{2} g''(t) + \dots + \frac{c_i}{i!} g^{(i)}(t) + \dots$$

что совпадает с ранее полученным (3.27).

Пример. Для системы с астатизмом первого порядка, схема которой дана на рис. 3.5, имеем

$$W(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad K = k_1 k_2 k_3. \quad (3.33)$$

Следовательно,

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s + K}.$$

Разделив числитель на знаменатель, получаем

$$\begin{aligned} \Phi_e(s) = \frac{1}{K} s + \left(\frac{T_1 + T_2}{K} - \frac{1}{K^2} \right) s^2 + \\ + \left(\frac{T_1 T_2}{K} - 2 \frac{T_1 + T_2}{K} + \frac{1}{K^2} \right) s^3 + \dots \end{aligned}$$

Отсюда, сравнивая с (3.31), находим коэффициенты ошибок

$$\begin{aligned} c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{K}, \quad \frac{c_2}{2} = \frac{T_1 + T_2}{K} - \frac{1}{K^2}, \\ \frac{c_3}{6} = \frac{T_1 T_2}{K} - 2 \frac{T_1 + T_2}{K^2} + \frac{1}{K^2}, \dots \end{aligned} \quad (3.34)$$

Поскольку коэффициент усиления K находится в знаменателе, а постоянные времени T в числителе, можно сделать вывод о том, что все ошибки уменьшаются с увеличением K и с уменьшением постоянных времени, характеризующих инерционность системы.

Из приведенного примера видно, что коэффициент c_0 соответствует статической, а c_1 — скоростной ошибкам, которые рассматривались ранее в § 3.2.

Допустим, задающее воздействие имеет вид

$$g = g_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

тогда

$$g' = v_0 + at, \quad g'' = a.$$

По формуле (3.27) с найденными коэффициентами получаем

$$\varepsilon_{yc} = \frac{1}{K} \left[v_0 + at + a(T_1 + T_2)t - \frac{a}{K} \right]. \quad (3.35)$$

Важно отметить, что при произвольном внешнем воздействии в формулах для ошибок общий коэффициент усиления разомкнутой цепи K (добротность) влечет за собой уменьшение всех видов установившихся ошибок замкнутой системы. Это главный фактор повышения

точности замкнутой системы автоматического управления.

Необходимо заметить, что вычисление установившихся ошибок по указанным формулам имеет практический смысл при достаточно медленном изменении внешнего воздействия. Иначе эта ошибка не будет реальной из-за наличия значительной переходной составляющей процесса.

Отметим также, что выше определялись коэффициенты ошибок по задающему воздействию. Аналогично это можно сделать и по возмущающим воздействиям, привлекая соответствующие передаточные функции.

§ 3.5. Чувствительность автоматических систем

Параметры системы автоматического управления, т. е. коэффициенты усиления и постоянные времени, зависят от физических параметров элементов, входящих в систему (сопротивления, емкости, индуктивности и т. п.). Величины этих физических параметров, во-первых, могут иметь разброс вследствие допусков на изготовление (*технологический разброс*). Во-вторых, в зависимости от условий эксплуатации в процессе работы системы они по разным причинам могут изменяться со временем (*эксплуатационное изменение*).

Поэтому возникает задача определения влияния разброса и изменения параметров системы на статические и динамические свойства процесса управления, т. е. на точность системы, на временные характеристики (показатели качества переходных процессов) и на частотные характеристики.

Степень влияния разброса и изменения параметров системы на ее статические и динамические свойства называется *чувствительностью системы*. Чувствительность определяется количественно. Существуют методы ее анализа и методы достижения малой чувствительности проектируемой системы к разбросу и изменению некоторых ее параметров, когда это требуется.

Пусть система описывается уравнениями в нормальной форме (2.21), т. е.

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + f_i(t), \quad (3.36)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

где x_i — координаты состояния системы. Изменяющиеся со временем параметры системы в процессе ее эксплуатации и от разброса при изготовлении обозначим через

$$\alpha_j \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Они входят в коэффициенты уравнения (3.36).

Поэтому уравнения системы (3.36) можно представить в следующей общей форме:

$$\frac{dx_i}{dt} = \psi_i(x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad (3.37)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Рассматривая малые изменения параметров, получим новые уравнения

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \tilde{\psi}_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n; \alpha_1 + \Delta\alpha_1, \dots, \alpha_m + \Delta\alpha_m), \quad (3.38)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Процесс в системе (3.37) при неизменных параметрах, определяемый ее решением

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t),$$

называется *исходным движением*.

Процесс в той же системе, но с измененными параметрами, определяемый решением уравнений (3.38), т. е.

$$\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t),$$

называется *варьированным движением*.

Возникает различие в протекании этих процессов за счет изменения параметров системы

$$\Delta x_i(t) = \tilde{x}_i(t) - x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

которое называется *дополнительным движением системы*.

При малых изменениях параметров α_j можно записать

$$\Delta x_i(t) = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1} \Delta \alpha_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_2} \Delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_m} \Delta \alpha_m,$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Обозначим

$$u_{ij}(t) = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, \dots, m). \quad (3.39)$$

Тогда дополнительное движение будет

$$\Delta x_i = u_{i1}\Delta\alpha_1 + u_{i2}\Delta\alpha_2 + \dots + u_{im}\Delta\alpha_m, \quad (3.40)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Величины $u_{ij}(t)$, определяемые формулой (3.39), называются *функциями чувствительности*.

В данном случае x_i являются координатами состояния системы. Вообще же аналогичные характеристики чувствительности вводятся так же и для различных показателей качества системы. Тогда в формуле (3.39) вместо x_i будет стоять соответствующий показатель качества, а в формуле (3.40) — вместо Δx_i — изменение этого показателя качества. Функции чувствительности для частотных характеристик будут функциями не времени, а частоты ω . Когда же показатель качества выражается не функцией, а числом, то u_{ij} называются уже не функциями, а *коэффициентами чувствительности*. Последние определяются как при эксплуатационном изменении параметров, так и при их технологическом разбросе.

Определение функций чувствительности производится следующим образом.

Продифференцируем исходное уравнение (3.37) по параметрам α_j . Получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_j} + \dots + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_j}.$$

Меняя в левой части порядок дифференцирования и учитывая формулу (3.39), получим выражения

$$\frac{du_{ij}}{dt} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} u_{1j} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} u_{2j} + \dots + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} u_{nj} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_j}, \quad (3.41)$$

которые называются *уравнениями чувствительности*. Непосредственное определение функций чувствительности u_{ij} по этим уравнениям затруднительно. Поэтому применяют косвенные методы, например, с помощью моделей [31] или графов [5].

Приведем простейший пример определения уравнений чувствительности для системы

$$(Tp + 1)x = Kg(t).$$

Введем две функции чувствительности

$$u_K = \frac{\partial x}{\partial K}, \quad u_T = \frac{\partial x}{\partial T}.$$

Уравнение данной системы в нормальной форме имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{T}x + \frac{K}{T}g(t).$$

Отсюда по формуле (3.41) получим

$$\frac{du_K}{dt} = -\frac{1}{T}u_K + \frac{1}{T}g(t), \quad \frac{du_T}{dt} = -\frac{1}{T}u_T + \frac{1}{T^2}(x - g(t)).$$

Это и будут уравнения чувствительности такой простейшей системы. Вычислив отсюда u_K и u_T , найдем изменение хода процесса управления за счет эксплуатационного изменения параметров K и T по формуле

$$\Delta x(t) = u_K(t)\Delta K + u_T(t)\Delta T.$$

Что же касается функций и коэффициентов чувствительности для показателей качества, то их определение проще, поскольку там не будет дифференциальных уравнений.

Рассмотрим функции чувствительности *частотных характеристик*.

Запишем передаточную функцию разомкнутой цепи системы

$$W(s) = W(s; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — параметры системы, имеющие технологический разброс или эксплуатационные изменения. После подстановки $s = j\omega$ запишем выражения амплитудной и фазовой частотных характеристик

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = A(\omega; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \\ \varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \varphi(\omega; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m).$$

Функции чувствительности здесь будут

$$u_{A_j}(\omega) = \frac{\partial A(\omega)}{\partial \alpha_j}, \quad u_{\varphi_j}(\omega) = \frac{\partial \varphi(\omega)}{\partial \alpha_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.42)$$

В результате вместо формул (3.40) здесь получим как функции частоты ω формулы для отклонения частотных характеристик за счет разброса и изменения параметров системы:

$$\Delta A(\omega) = \sum_{j=1}^m u_{A_j}(\omega) \Delta \alpha_j, \quad \Delta \varphi(\omega) = \sum_{j=1}^m u_{\varphi_j}(\omega) \Delta \alpha_j. \quad (3.43)$$

В частности, для приведенного выше простейшего примера имеем

$$W(s) = \frac{K}{Ts + 1}.$$

Найдем функции чувствительности частотных характеристик по параметру $\alpha_1 = T$. Поскольку здесь

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}},$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg } T\omega,$$

то функции чувствительности (3.42) будут

$$u_{AT} = \frac{\partial A(\omega)}{\partial T} = \frac{-KT\omega^2}{(T^2\omega^2 + 1)^{3/2}},$$

$$u_{\varphi T} = \frac{\partial \varphi(\omega)}{\partial T} = \frac{\omega}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Отклонения частотных характеристик согласно (3.43) получают значения

$$\Delta A(\omega) = u_{AT}(\omega) \Delta T,$$

$$\Delta \varphi(\omega) = u_{\varphi T}(\omega) \Delta T.$$

Определение функций чувствительности применяется для проектирования системы с наименьшим изменением качественных показателей при отклонении значений параметров системы от расчетных.

Аналогично можно находить также функции или коэффициенты чувствительности для нулей и полюсов передаточной функции при корневых методах исследования, а также для других показателей качества.

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 4.1. Понятие устойчивости линеаризованных систем

Устойчивость систем автоматического управления является одним из важнейших условий ее работоспособности, так как устойчивость включает в себя требование затухания переходных процессов во времени. Очевидно, что система с расходящимся процессом была бы неработоспособной.

Все реальные системы в технике и в природе, как правило, являются в большей или меньшей степени нелинейными. Всегда существует много факторов, отклоняющих реальные характеристики от прямолинейных. Однако многие системы можно считать близкими к линейным и с необходимой для практики точностью проектировать как линейные. Для этого производится линеаризация характеристик и уравнений для реальных звеньев системы (см. § 1.1).

Большое практическое значение имеют, конечно, и существенно нелинейные системы. Они рассматриваются отдельно в другом учебном пособии.

Итак, обратимся к линейным системам, рассматривая их как результат линеаризации реальных систем, т. е. к *линеаризованным* системам. Можно сказать, что линейная система является идеализированной (приближенной) математической моделью реальной системы.

Рассмотрим сначала идеально линейную систему. Под *устойчивостью линейной системы* понимают свойство затухания переходного процесса с течением времени, иначе говоря, — следующее свойство собственного (свободного) движения системы:

$$x_{\text{своб}}(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

Из формул (3.5) для случая разных корней и (3.6) при наличии кратных корней характеристического уравнения системы видно, что свойство (4.1) имеет место тогда и только тогда, когда все корни λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

обладают отрицательными вещественными частями. Это иллюстрируется графиками для составляющих решения, соответствующих вещественному корню и паре комплексных корней (рис. 4.1).

Если же хотя бы один вещественный корень λ_i характеристического уравнения будет положительным, или если хотя бы одна пара комплексных корней будет иметь

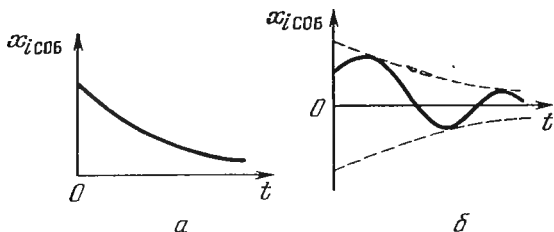


Рис. 4.1

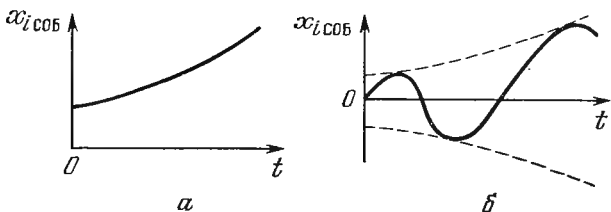


Рис. 4.2

положительную вещественную часть, то переходный процесс будет расходящимся (рис. 4.2).

Если в характеристическом уравнении системы имеет-ся хотя бы один нулевой корень ($\lambda_i = 0$) или хотя бы одна пара чисто мнимых корней ($\lambda_{i,i+1} = \pm j\omega$), а все остальные корни имеют отрицательные вещественные части, то будем говорить, что система находится на границе устойчивости. Это следует из того, что нулевой корень можно рассматривать как границу между отрицательным и положительным, а чисто мнимый корень — как границу между комплексными корнями с отрицательной и положительной вещественными частями.

Поведением замкнутой системы на границе устойчивости пока интересоваться не будем, так как работоспособная система автоматического регулирования должна

быть устойчивой с запасом и не приближаться к этой границе.

Условие устойчивости линейной системы выражается, следовательно, в том, что все корни характеристического уравнения λ_i должны располагаться в левой полуплоскости комплексного переменного λ (рис. 4.3). Мнимая ось ω плоскости корней служит границей устойчивости.

Можно выделить три типа границ устойчивости линейной системы, которые характеризуются соответственно:

- 1) нулевым корнем $\lambda_1 = 0$;
- 2) парой чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$;
- 3) бесконечно удаленным корнем $\lambda_1 = \infty$.

Заметим, что бесконечность на комплексной плоскости рассматривается как бесконечно удаленная точка, противоположная нулевой. Поэтому она тоже является границей между положительной (правой) и отрицательной (левой) полуплоскостями.

В первом случае ($\lambda_1 = 0$) граница устойчивости называется *апериодической*, а во втором случае ($\lambda_{1,2} = \pm j\omega$) — *колебательной*, причем значение мнимой части

корня ω равно частоте незатухающих колебаний системы на границе устойчивости, так как при $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$ имеем решение

$$x_{\text{свб}} = A \sin(\omega t + \beta),$$

где A и β определяются начальными условиями.

Перейдем теперь к *реальным системам*, которые исследуются в линеаризованном виде.

Прежде всего, надо дать общее определение понятия устойчивости и определить, как может влиять на устойчивость небольшое отличие реальной системы от ее линейной математической модели. Надо быть уверенным, что исследование устойчивости проектируемой линейной системы обеспечит затем устойчивость и системы реальной с малыми нелинейностями.

Общее определение понятия устойчивости любой динамической системы по Ляпунову выглядит следующим образом.

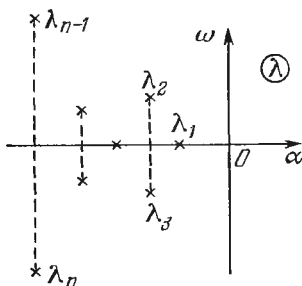


Рис. 4.3

Запишем уравнения динамики нелинейной системы n -го порядка в нормальной форме Коши

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.2)$$

при отсутствии возмущающих воздействий. Устойчивость рассматривается как свойство свободного движения системы после начального отклонения ее, вызванного любыми причинами.

Пусть $y^*(t)$ обозначает некоторый установившийся процесс работы системы или, как говорят, *невозмущенное движение*. Отклонение *возмущенного движения* $y(t)$, определяемого уравнениями (4.2) при начальных условиях $y(t_0)$, обозначим через $x(t)$:

$$x_i(t) = y_i(t) - y_i^*(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.3)$$

Тогда можно написать уравнения возмущенного движения в отклонениях в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.4)$$

а невозмущенное движение будет $x^* = 0$. Переменные x_i являются координатами состояния системы (см. § 2.3).

В общем случае конкретное выражение уравнений (4.4) зависит от вида установившегося процесса $y^*(t)$, так как они получаются из (4.2) подстановкой (4.3). Поэтому, исследуя уравнения (4.4), вообще говоря, необходимо указывать, об устойчивости какого установившегося режима или невозмущенного движения $y^*(t)$ идет речь.

Невозмущенное (установившееся) движение $y_i^*(t)$ системы n -го порядка можно представить геометрически условно в n -мерном пространстве (с добавлением еще оси времени t) в виде некоторой кривой (рис. 4.4). Возмущенное движение $y(t)$, вызванное начальным отклонением при $t = t_0$ изобразится другой кривой (рис. 4.4).

В отклонениях $x(t)$, т. е. в пространстве координат состояния системы, эта кривая возмущенного движения будет выглядеть как показано на рис. 4.5. При этом невозмущенное движение $x^* = 0$ изобразится прямой линией, совпадающей с осью t .

Невозмущенное движение системы $x^* = 0$ называется *устойчивым*, если, задав трубку сколь угодно малого

n -мерного сечения ε (рис. 4.5), можно подобрать в начальный момент t_0 такую область начальных условий δ , зависящую от ε , что в дальнейшем с увеличением t возмущенное движение $x(t)$ не выйдет из заданной трубки ε .

Аналитическое определение понятия устойчивости по Ляпунову формулируется следующим образом.

Невозмущенное движение системы $x^* = 0$ называется устойчивым, если при заданном $\varepsilon > 0$, сколь бы оно мало

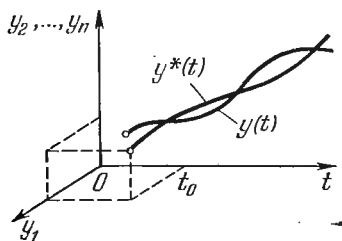


Рис. 4.4

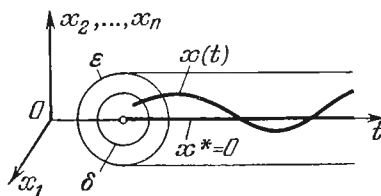


Рис. 4.5

ни было, существует такое $\delta > 0$, зависящее от ε , что при начальных условиях

$$|x_i(t_0)| < \delta \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

в дальнейшем движении ($t_0 < t < \infty$) будет все время соблюдаться условие

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Заметим, что в этом аналитическом определении области ε и δ , в отличие от рис. 4.5, выглядят «прямоугольными» (в n -мерном пространстве), что не имеет принципиального значения.

Невозмущенное движение $x^* = 0$ будет неустойчивым, если указанное условие не выполняется хотя бы для одного из x_i .

Если в рамках указанного выше условия имеем $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то невозмущенное движение $x^* = 0$ называется асимптотически устойчивым.

Если же $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ после любых больших начальных отклонений, то система называется устойчивой в целом (или «в большом»).

Обратимся теперь к линеаризованной системе. Уравнения (4.4) в процессе линеаризации (разложением в

ряд Тейлора) получают вид

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.5)$$

где через φ_i обозначены члены высокого порядка, начиная со второго.

Получаемая отсюда линейная система путем отбрасывания малых нелинейностей φ_i называется *первым приближением*:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Для него можно написать характеристическое уравнение

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для нелинейных систем, к которым применимо разложение вида (4.5), существуют следующие три теоремы Ляпунова об исследовании устойчивости по первому приближению:

1) невозмущенное движение $x^* = 0$ устойчиво независимо от вида малых нелинейностей φ_i , если все корни характеристического уравнения $D(\lambda) = 0$ имеют отрицательные вещественные части;

2) невозмущенное движение $x^* = 0$ неустойчиво независимо от вида малых нелинейностей φ_i , если хотя бы один корень характеристического уравнения $D(\lambda) = 0$ имеет положительную вещественную часть;

3) в случае наличия в каких-либо корнях характеристического уравнения $D(\lambda) = 0$ нулевой вещественной части при всех остальных отрицательных, ничего нельзя сказать об устойчивости невозмущенного движения $x^* = 0$ по первому приближению без специального исследования полного уравнения (4.5) с малыми нелинейностями φ_i .

Третий случай для *линейной теории* автоматического управления не представляет интереса, так как наличие нулевого корня или чисто мнимых корней характеристического уравнения будет означать просто границу устойчивости линейной системы. А система не должна нахо-

даться не только на границе устойчивости, но даже и вблизи нее.

Поэтому для наших целей достаточно использовать первые две теоремы, которые и являются обоснованием всей излагаемой ниже теории устойчивости линеаризованных систем, основанной на требовании к корням характеристического уравнения, указанном в начале данного параграфа.

Заметим, что поскольку требование к корням обеспечивает свойство $x_{\text{св}}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ при любых начальных условиях, то *линейная система оказывается всегда при этом устойчивой асимптотически и в целом («в большом»)*. Речь идет, конечно, об обыкновенных линейных системах с постоянными параметрами.

§ 4.2. Алгебраические критерии устойчивости

Выше было сформулировано условие устойчивости линейной системы в виде требования к корням характеристического уравнения. Однако вычисление корней уравнения высокой степени затруднительно. Поэтому были выведены *критерии устойчивости*, позволяющие судить об устойчивости или неустойчивости системы непосредственно по коэффициентам характеристического уравнения без вычисления его корней.

Различные формы таких критериев рассматриваются в курсах высшей алгебры. В теории автоматического регулирования наибольшее применение из алгебраических критериев устойчивости получили критерий Рауса и критерий Гурвица. Мы ограничимся одним последним.

Предварительно рассмотрим необходимое условие устойчивости.

Пусть характеристическое уравнение линейной системы $D(\lambda) = 0$ в развернутой форме имеет вид

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (4.6)$$

Докажем, что *необходимым условием устойчивости является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения, т. е.*

$$a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_{n-1} > 0, a_n > 0, \text{ если } a_0 > 0 \quad (4.7)$$

(этому условию удовлетворяет и случай всех отрицательных коэффициентов, если $a_0 < 0$, так как можно поменять все знаки на обратные).

Для доказательства разложим левую часть характеристического уравнения (4.6) на множители:

$$a_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0, \quad a_0 > 0.$$

Пусть все корни его имеют отрицательные вещественные части

$$\lambda_1 = -|\alpha_1|, \lambda_{2,3} = -|\alpha_2| \pm j\omega_2, \dots, \lambda_n = -|\alpha_n|.$$

Подставив их в уравнение, получим

$$a_0(\lambda + |\alpha_1|)(\lambda + |\alpha_2| - j\omega_2)(\lambda + |\alpha_2| + j\omega_2) \dots \dots (\lambda + |\alpha_n|) = 0.$$

Поскольку средние два сомножителя дают

$$[(\lambda + |\alpha_2|)^2 + \omega^2],$$

то видно, что после перемножения всех скобок получим в уравнении только положительные коэффициенты. Это и требовалось доказать.

Однако в общем случае положительность коэффициентов уравнения недостаточна для устойчивости системы. В самом деле, положительные коэффициенты уравнения могут получиться и при положительных вещественных частях *комплексных* корней. Но *все вещественные корни* при положительных коэффициентах уравнения будут обязательно отрицательными.

Только в частных случаях, когда имеется уравнение *первой или второй* степени, положительность коэффициентов оказывается *необходимым и достаточным* условием устойчивости (это легко проверить). А при $n \geq 3$ это условие лишь необходимо, но недостаточно, ибо оно обеспечивает отрицательность только вещественных корней.

Приведем теперь *критерий устойчивости Гурвица* без доказательства *). Он формулируется следующим образом.

Для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы были *положительными* *n главных определителей* следующей матрицы коэффициентов характеристического уравнения (4.6) данной системы:

$$\begin{bmatrix} -a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}, \quad (a_0 > 0).$$

*) Доказательство см. в [15] или [17].

В первой строке матрицы пишутся коэффициенты с нечетными индексами, во второй — с четными. Концы строк заполняются нулями, так чтобы матрица имела n столбцов, где n — порядок уравнения системы. Третья и четвертая строки получаются сдвигом первых двух на одно место вправо и т. д.

Указанные главные определители имеют вид

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots \quad (4.8)$$

Они называются определителями Гурвица.

Последний определитель Гурвица, как видно из приведенной выше матрицы, равен

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} a_n.$$

Поэтому его положительность сводится при $\Delta_{n-1} > 0$ к условию $a_n > 0$.

Наиболее важным, как увидим далее, является предпоследний определитель Гурвица Δ_{n-1} .

Для систем первого и второго порядка критерий Гурвица сводится просто к положительности коэффициентов a_0, a_1, a_2 . Для системы третьего порядка характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0,$$

а условие устойчивости по Гурвицу будет

$$\Delta_{n-1} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad (n=3), \quad (4.9)$$

причем остальные неравенства сводятся к требованию положительности коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3 .

Условие (4.9) записывается еще в виде

$$a_1 a_2 > a_0 a_3 \quad (4.10)$$

(произведение средних коэффициентов уравнения должно быть больше произведения крайних). Этот критерий для систем третьего порядка ранее был получен И. А. Вышнеградским.

Аналогично для системы четвертого порядка

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$$

условием устойчивости по Гурвицу будет положительность всех коэффициентов характеристического уравнения и выполнение неравенства

$$\Delta_{n-1} = a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_4a_1^2 > 0 \quad (n=4). \quad (4.11)$$

Для устойчивости систем пятого и шестого порядков требуется, кроме положительности коэффициентов, выполнение двух неравенств типа (4.9), (4.11), но более сложной формы. Для систем седьмого и восьмого порядков — трех неравенств и т. д. Сложность этих неравенств быстро возрастает с увеличением порядка системы n .

Поэтому для общих исследований особенно удобен критерий Гурвица при $n \leq 4$. Но при числовом задании всех коэффициентов легко проверить устойчивость системы, конечно, и при любом n .

Найдем *границы устойчивости*. Апериодическая граница устойчивости (нулевой корень) будет согласно уравнению (4.6) в том случае, когда $a_n = 0$, но при условии положительности всех определителей Гурвица (кроме последнего).

Пара чисто мнимых корней в характеристическом уравнении (колебательная граница устойчивости) появляется при

$$\Delta_{n-1} = 0, \quad (4.12)$$

если при этом все остальные определители Гурвица положительны (для систем третьего и четвертого порядка это последнее означает просто положительность коэффициентов уравнения).

Наконец, граница устойчивости, соответствующая бесконечному корню, будет, согласно уравнению (4.6), при $a_0 = 0$. В самом деле, если все уравнение разделить на λ^n , то получим

$$a_0 + a_1 \frac{1}{\lambda} + \dots + a_{n-1} \frac{1}{\lambda^{n-1}} + a_n \frac{1}{\lambda^n} = 0.$$

Отсюда видно, что при $a_0 = 0$ имеем $\frac{1}{\lambda} = 0$, а значит $\lambda = \infty$.

Пример. Передаточная функция разомкнутой цепи системы задана в виде (см. рис. 3.5):

$$W(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}, \quad K = k_1k_2k_3.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы согласно § 2.3 будет

$$T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 + T_2) \lambda^2 + \lambda + K = 0.$$

Коэффициенты его положительны. Условие устойчивости по критерию Гурвица (4.10) получит вид

$$T_1 + T_2 > K T_1 T_2 \quad \text{или} \quad K < \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right). \quad (4.13)$$

Границы устойчивости:

- 1) $a_n = 0, \quad K = 0;$
- 2) $\Delta_{n-1} = 0, \quad K_{\text{гр}} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2};$
- 3) $a_0 = 0, \quad T_1 T_2 = 0.$

Эти три границы устойчивости можно изобразить графически в пространстве параметров K, T_1, T_2 и найти области устойчивости системы.

Найдем сначала область устойчивости системы по одному параметру K (общий коэффициент усиления разомкнутой цепи). Пространство параметров здесь одна

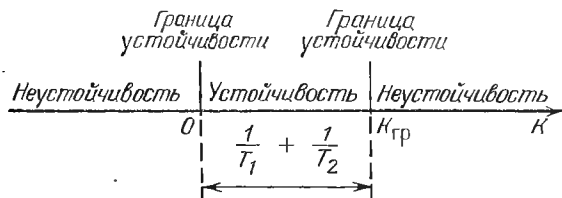


Рис. 4.6

прямая линия, а границы устойчивости — точки на ней: $K = 0$ и $K = K_{\text{гр}}$ (рис. 4.6). Область устойчивости согласно (4.13) лежит между этими точками.

Те же границы устойчивости системы можно построить на плоскости двух параметров, например: K, T_1 . Первая граница ($K = 0$) лежит на оси T_1 (рис. 4.7). Вторая граница $\frac{1}{T_1} = K - \frac{1}{T_2}$ имеет вид гиперболы с асимптотами $T_1 = 0$ и $K = \frac{1}{T_2}$. Третья граница ($T_1 = 0$) совпадает с осью K .

Область устойчивости, определяемая неравенством (4.13), обозначена на рис. 4.7. Штриховка границ делается в сторону области устойчивости.

Как видим, при увеличении постоянных времени T_1 , T_2 область устойчивости сужается. Отрицательно влияет на устойчивость также и *увеличение* коэффициента усиления K . При любых заданных T_1 и T_2 существует свое $K_{гр}$ (рис. 4.6), после чего система становится неустойчивой. Это очень важное обстоятельство, так как мы знаем

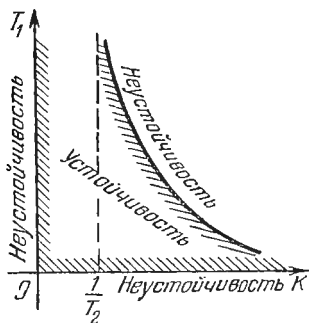


Рис. 4.7

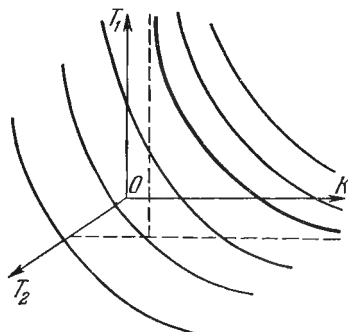


Рис. 4.8

(см. главу 3), что для повышения точности регулирования необходимо *увеличивать* K . Тут выявляется противоречие между требованием точности (увеличение K) и устойчивости (ограничение K).

Далее можно построить область устойчивости и в пространстве трех параметров K , T_1 , T_2 (рис. 4.8). Там жирной линией обозначена граница устойчивости, перенесенная с рис. 4.7. Границами устойчивости здесь являются три координатные плоскости и криволинейная поверхность, сечениями которой в вертикальных плоскостях, параллельных KOT_1 и в горизонтальных, параллельных KOT_2 , будут гиперболы.

§ 4.3. Критерий устойчивости Михайлова.

Построение областей устойчивости

Возьмем характеристический многочлен линейной системы n -го порядка

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (4.14)$$

с положительными коэффициентами (необходимое условие устойчивости). Подставив в него чисто мнимое значение $\lambda = j\omega$, получим

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega), \quad (4.15)$$

где

$$\begin{aligned} X &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + \dots, \\ Y &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.16)$$

Изобразим годограф этого выражения на комплексной плоскости (X, Y) . Прежде всего заметим следующее:

при $\omega = 0$ имеем $X = a_n, \quad Y = 0$;

при $\omega = \infty$ будет $X = +\infty$ или $-\infty, \quad Y = +\infty$ или $-\infty$.

Предельные значения $+\infty$ или $-\infty$ зависят от показателя степени n . Из формул (4.16), где все a_i положительны, видно, что при $\omega = \infty$ для $n = 3$ будет $X = -\infty, \quad Y = -\infty$; а для $n = 5$ получим $X = +\infty, \quad Y = +\infty$ и т. д. Поэтому годографы эти имеют для различных n

примерно такие формы как показано на рис. 4.9. Эти годографы называются *кривыми Михайлова*.

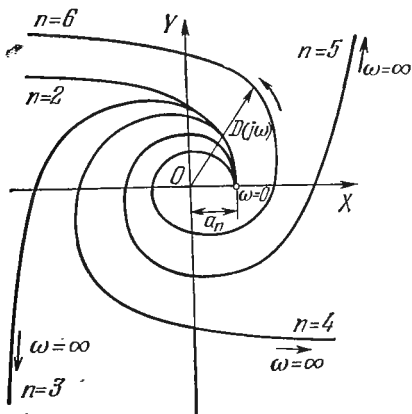


Рис. 4.9

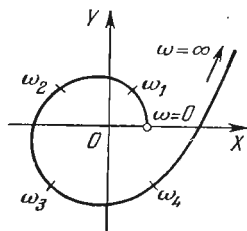


Рис. 4.10

Практически кривая Михайлова строится по точкам. Задают несколько разных значений ω в интервале между 0 и ∞ (достаточно по одной точке в каждом квадранте). По формулам (4.16) вычисляют для них координаты точек кривой Михайлова X и Y (рис. 4.10). Поэтому вдоль кривой Михайлова обычно имеются отметки конкретных значений ω .

Сформулируем теперь критерий устойчивости Михайлова, а затем докажем его.

Формулировка критерия. Для устойчивости линейной системы n -го порядка необходимо и достаточно, чтобы изменение аргумента функции $D(j\omega)$ при изменении ω

от 0 до ∞ равнялось бы $n \frac{\pi}{2}$, т. е.

$$\Delta \arg D(j\omega) = n \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (4.17)$$

Другими словами, требуется, чтобы кривая Михайлова (рис. 4.9) проходила последовательно n квадрантов против часовой стрелки (все время окружая начало координат). Например, видно, что кривые на рис. 4.9

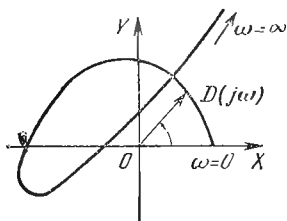


Рис. 4.11

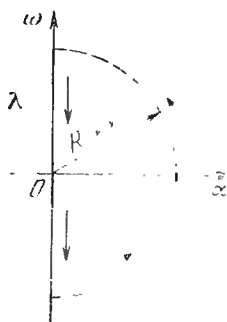


Рис. 4.12

соответствуют устойчивым системам, а на рис. 4.11 — неустойчивой системе при $n = 5$.

Доказательство этого критерия следующее.

Возьмем на комплексной плоскости корней λ многочлена $D(\lambda)$ (4.14) контур, показанный на рис. 4.12. При обходе этого контура λ функция $D(\lambda)$ согласно принципу аргумента, известному из теории функций комплексного переменного, должна получить приращение аргумента

$$\Delta \arg D(\lambda) = m \cdot 2\pi, \quad (4.18)$$

где m — число корней внутри контура, т. е. в правой полуплоскости (полюса функции здесь отсутствуют).

Представив $D(\lambda)$ в виде

$$D(\lambda) = \lambda^n \left(a_0 + \frac{a_1}{\lambda} + \dots + \frac{a_n}{\lambda^n} \right), \quad (4.19)$$

получим на первой (пунктирной) части контура, где $\lambda \rightarrow \infty$, приращение $\Delta_1 \arg \lambda = \pi$, а для многочлена $D(\lambda)$

$$\Delta_1 \arg D(\lambda) = \Delta \arg \lambda^n = n\pi,$$

так как внутри скобки в (4.19) все дроби обращаются в нули.

Поэтому для выполнения равенства (4.18) на второй части контура (мнимая ось на рис. 4.12), т. е. при

$$\lambda = j\omega, \quad +\infty \geq \omega \geq -\infty$$

должно согласно (4.18) получиться

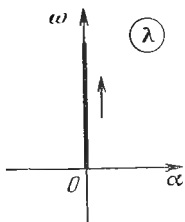
$$\Delta_2 \arg D(\lambda) = (2m - n)\pi. \quad (4.20)$$

Но из (4.16) видно, что $X(\omega)$ четная, а $Y(\omega)$ нечетная функции ω , т. е.

$$D(-j\omega) = \overline{D(j\omega)}.$$

Поэтому можно проходить лишь положительную часть мнимой оси и полученный результат удвоить.

Используя этот факт и меняя направление изменения ω , для положительной части мнимой оси (рис. 4.13), вместо (4.20) мы должны получить



$$\Delta \arg D(j\omega) = (n - 2m) \frac{\pi}{2} \quad \text{при } 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (4.21)$$

Для устойчивости системы надо потребовать, чтобы все корни λ_i многочлена $D(\lambda)$ лежали в левой полуплоскости, т. е. чтобы $m = 0$, а значит, чтобы

$$\Delta \arg D(j\omega) = n \frac{\pi}{2} \quad \text{при } 0 \leq \omega \leq \infty,$$

что и требовалось доказать.

Формулу (4.21) можно использовать для подсчета числа корней m , лежащих справа, когда система неустойчива, а именно

$$m = \frac{n}{2} - \frac{\Delta \arg d(j\omega)}{\pi}. \quad (4.22)$$

Например, если для системы пятого порядка ($n = 5$) получена кривая Михайлова в виде рис. 4.11, то, подсчитывая обороты вектора $D(j\omega)$ по чертежу, получаем

$$\Delta \arg D(j\omega) = \frac{\pi}{2}$$

и по формуле (4.22) находим $m = 2$. Следовательно, данная система неустойчива за счет наличия в характеристическом

ческом уравнении $D(\lambda) = 0$ двух корней с положительной вещественной частью.

Рассмотрим теперь *определение границ устойчивости* по критерию Михайлова. Очевидно, что все три типа гра-

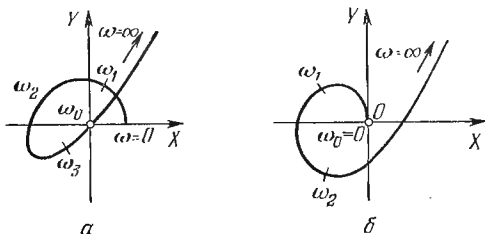


Рис. 4.14

ниц устойчивости (§ 4.1) можно объединить равенством $\lambda_1 = j\omega_0$, включая $\omega_0 = 0$ и $\omega_0 = \infty$.

Если характеристическое уравнение системы $D(\lambda) = 0$ имеет корень $\lambda_1 = j\omega_0$, то удовлетворяется равенство

$$D(j\omega_0) = 0,$$

откуда согласно (4.16) получаем

$$X(\omega_0) = 0, \quad Y(\omega_0) = 0. \quad (4.23)$$

Графически это означает попадание одной точки кривой Михайлова ($\omega = \omega_0$) в начало координат, как показано, например, на рис. 4.14.

Физический смысл величины $\omega = \omega_0$ — частота колебаний системы на границе устойчивости (см. § 4.1).

Важно отметить следующее. На границе устойчивости системы все остальные корни, кроме $\lambda = \pm j\omega_0$, должны лежать слева от мнимой оси плоскости λ . Иначе система будет неустойчивой. Поэтому, кроме условия (4.23), требуется, чтобы кривая Михайлова проходила бы все остальные квадранты, кроме пропущенного из-за прохождения через начало координат, как показано, например, для $n = 5$, на рис. 4.14.

Следовательно, например, рис. 4.15 соответствует не границе устойчивости, а неустойчивой системе.

Другими словами, очертание кривой Михайлова на границе устойчивости должно быть таким, чтобы *малой*

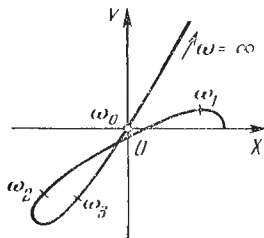


Рис. 4.15

деформацией ее в начале координат можно было удовлетворить критерию Михайлова. Это можно сделать на рис. 4.14, но не на рис. 4.15.

Аналитически это означает, что в дополнение к равенствам (4.23) должен удовлетворяться критерий устойчивости для многочлена

$$D_1(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\lambda^2 + \omega_0^2} \quad (4.24)$$

в котором исключена пара чисто мнимых корней, а в случае нулевого корня

$$D_1(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\lambda}.$$

Заметим, что условие (4.24) надо проверять только при $n \geq 5$, так как при $n \leq 4$ оно сводится просто к положительности коэффициентов уравнения $D(\lambda) = 0$ (которая предполагается с самого начала).

Выражения (4.23) используются для построения областей устойчивости системы на плоскости любых двух параметров A и B , выбираемых при проектировании системы (это могут быть, например, коэффициент усиления и постоянная времени). Тогда (4.23) можно записать в виде

$$X(\omega_0, A, B) = 0, \quad Y(\omega_0, A, B) = 0, \quad (4.25)$$

причем параметры A и B входят в коэффициенты этих выражений (коэффициенты характеристического уравнения системы).

Таким образом, выражения (4.25) представляют собой уравнения границ устойчивости, изображаемых в виде некоторых кривых на плоскости параметров A, B . Путем задания разных значений величины ω_0 ($0 \leq \omega_0 \leq \infty$) каждый раз из уравнений (4.25) определяются значения параметров A и B . В результате по точкам строятся границы устойчивости на плоскости A, B .

Пример. Рассмотрим определение границ и области устойчивости системы по критерию Михайлова для простого случая. Пусть, как и в прежнем примере (§ 4.2),

$$D(\lambda) = T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 + T_2) \lambda^2 + \lambda + K.$$

Тогда для

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$$

получим выражения

$$X = K - (T_1 + T_2)\omega^2, \quad Y = \omega - T_1 T_2 \omega^3.$$

Отсюда для границы устойчивости согласно (4.25) имеем

$$K - (T_1 + T_2)\omega_0^2 = 0, \quad \omega_0(1 - T_1 T_2 \omega_0^2) = 0.$$

Из второго уравнения получаем два значения

$$\omega_0 = 0 \quad \text{и} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{T_1 T_2}.$$

Тогда из первого находим соответственно

$$K = 0 \quad \text{и} \quad K = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}.$$

Для бесконечно удаленного корня ($\omega_0 = \infty$) из предыдущего выражения получаем

$$T_1 T_2 = 0.$$

Эти результаты совпадают с тем, что было сделано в примере по критерию Гурвица, где были изображены и области устойчивости, которые получаются, естественно, такими же (рис. 4.6, 4.7 и 4.8) и по критерию устойчивости Михайлова.

Если, как мы говорили выше, критерий Гурвица для определения границ устойчивости удобен лишь при $n \leq 4$, то здесь по критерию Михайлова удобно определять области устойчивости для систем любого порядка.

Достоинством критерия Михайлова является то, что он проще и нагляднее для определения устойчивости системы, чем критерий Гурвица, особенно для систем высокого порядка.

Другая форма критерия Михайлова состоит в использовании свойства перемежаемости корней многочленов $X(\omega)$ и $Y(\omega)$.

В самом деле, из рис. 4.9 видно, что, идя вдоль кривой Михайлова от точки $\omega = 0$ в направлении возрастания ω , мы сначала выходим с оси X , затем пересекаем ось Y , потом снова X и т. д. Это значит, что корни уравнений

$$X(\omega) = 0, \quad Y(\omega) = 0$$

должны следовать поочередно друг за другом. Кривые $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ имеют вид, как примерно показано на рис. 4.16.

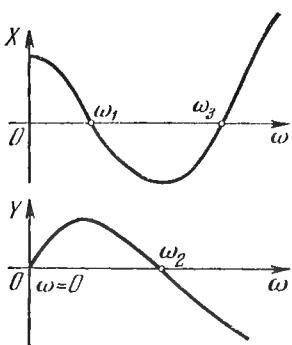


Рис. 4.16

Итак, условием устойчивости системы является перемежаемость корней этих уравнений. Нарушение данного условия говорит о неустойчивости системы.

Для прежнего примера уравнения принимают вид

$$X = K - (T_1 + T_2)\omega^2 = 0,$$

$$Y = \omega - T_1 T_2 \omega^2 = 0.$$

Перемежаться должны корни этих уравнений, а именно:

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_1^2 = \frac{K}{T_1 + T_2}, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{T_1 T_2}.$$

Следовательно, здесь должно быть

$$\omega_2 > \omega_1,$$

т. е.

$$\frac{1}{T_1 T_2} > \frac{K}{T_1 + T_2},$$

откуда вытекает прежнее условие устойчивости

$$K < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2},$$

которое было получено выше другими способами.

§ 4.4. Частотный критерий устойчивости Найквиста

Частотный критерий устойчивости (критерий Найквиста) базируется на частотных характеристиках разомкнутой цепи системы автоматического управления и дает правила, согласно которым по виду частотной характеристики разомкнутой цепи можно судить об устойчивости замкнутой системы.

Рассмотрим разные случаи.

Система, устойчивая в разомкнутом состоянии. Передаточная функция разомкнутой цепи

$$W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)} = \frac{K(b_0 s^m + \dots + 1)}{c_0 s^n + \dots + 1}, \quad m < n. \quad (4.26)$$

Этот случай соответствует системам автоматического управления *без астатизма*. Введем вспомогательную функцию

$$W_1(s) = 1 + W(s) = \frac{L(s) + KN(s)}{L(s)} = \frac{D(s)}{L(s)},$$

где $D(s)$ — характеристический многочлен замкнутой системы, а $L(s)$ — характеристический многочлен разомкнутой цепи этой системы.

Подставим $s = j\omega$, получим

$$W_1(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{L(j\omega)}.$$

По критерию Михайлова изменение аргумента $L(j\omega)$ при $0 \leq \omega \leq \infty$ равно $n\frac{\pi}{2}$, так как предполагается, что разомкнутая цепь устойчива. С другой стороны, требуется,

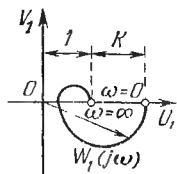


Рис. 4.17

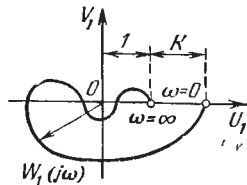


Рис. 4.18

чтобы система была устойчивой в замкнутом состоянии. Для этого нужно потребовать, чтобы изменение аргумента $D(j\omega)$ при $0 \leq \omega \leq \infty$ также равнялось $n\frac{\pi}{2}$.

Отсюда следует, что изменение аргумента $W_1(j\omega)$ должно быть:

$$\Delta \arg W_1(j\omega) = \Delta \arg D(j\omega) - \Delta \arg L(j\omega) = 0.$$

Это значит, что годограф $W_1(j\omega)$ не должен охватывать начало координат (рис. 4.17 и 4.18). Вернемся теперь к функции

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) - 1,$$

которая представляет собой амплитудно-фазовую частотную характеристику разомкнутой цепи (рис. 4.19 и 4.20).

Отсюда получаем следующую формулировку частотного критерия Найквиста.

Если разомкнутая цепь системы устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой цепи не охватывала точку (-1) (см. рис. 4.19 и 4.20).

График на рис. 4.19 соответствует случаю, когда устойчивость системы нарушится только с увеличением общего коэффициента усиления разомкнутой цепи K ,

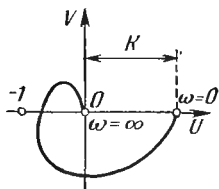


Рис. 4.19

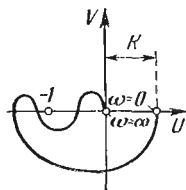


Рис. 4.20

а график на рис. 4.20 — случаю, когда и при уменьшении K система может стать неустойчивой (пропорционально величине K , согласно (4.26), меняются радиус-векторы, всех точек характеристики). Неустойчивость замкнутой системы иллюстрируется на рис. 4.21 и 4.22.

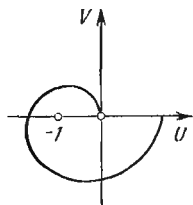


Рис. 4.21

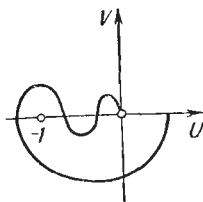


Рис. 4.22

Имея в виду сложные очертания амплитудно-фазовых характеристик (ключеобразного вида как на рис. 4.20 и более сложные), к записанной выше формулировке частотного критерия добавляется разъяснение, что надо понимать под термином «неохват точки (-1) ». Характеристика может пересекать отрицательную ось левее точки (-1) , но тогда число положительных (сверху вниз) переходов характеристики через ось абсцисс левее точки (-1) должно равняться числу отрицательных переходов (снизу вверх).

Система, нейтральная в разомкнутом состоянии. Характеристический многочлен разомкнутой цепи $L(s)$ имеет нулевые корни, а все остальные корни имеют отрицательные вещественные части. Передаточная функция разомкнутой цепи $W(s)$ имеет соответственно нулевые полюса:

$$W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)} = \frac{K(b_0 s^m + \dots + 1)}{s^v(c_v s^{n-v} + \dots + 1)}, \quad m < n.$$

Это соответствует *астатическим системам*, причем v — порядок астатизма.

Рассмотрим сначала случай $v = 1$, т. е.

$$L(s) = s(c_1 s^{n-1} + \dots + 1).$$

Плоскость корней для $L(s)$ имеет вид, примерно как показано на рис. 4.23. Подстановка $s = j\omega$ при $0 \leq \omega \leq \infty$ означает перемещение вдоль оси ω от точки 0 вверх

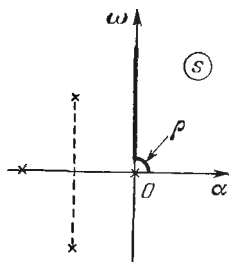


Рис. 4.23

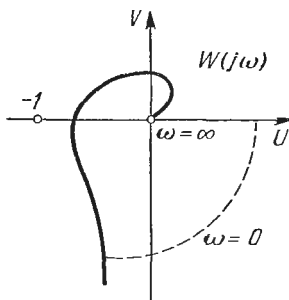


Рис. 4.24

(рис. 4.23). При этом, чтобы все корни оставить слева, обойдем точку 0 по окружности малого радиуса, т. е.

$$s = \rho e^{j\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Тогда при $s \rightarrow 0$ получим

$$W(s) \rightarrow \frac{K}{s} = \frac{K}{\rho e^{j\varphi}} = R e^{-j\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

где $R = \frac{K}{\rho}$ — большая величина, причем $R \rightarrow \infty$ при $\rho \rightarrow 0$. Следовательно, точке $\omega = 0$ плоскости корней соответствует на характеристике $W(j\omega)$ четверть окружности бесконечного радиуса (рис. 4.24).

Поскольку при этих выкладках все корни $L(s)$ оставались слева, то формулировка критерия устойчивости остается такой же, как и для случая устойчивой разомкнутой цепи, а именно, не должна охватываться точка (-1) .

В случае $\nu=2$ и $\nu=3$ аналогично получаем ту же формулировку критерия — нехват точки (-1) , как показано на рис. 4.25, а и б.

Для сложных очертаний амплитудно-фазовых характеристик в число отрицательных переходов надо включать и переход пунктирной окружности бесконечно большого радиуса при $\omega=0$. Это имеет место и на рис. 4.25.

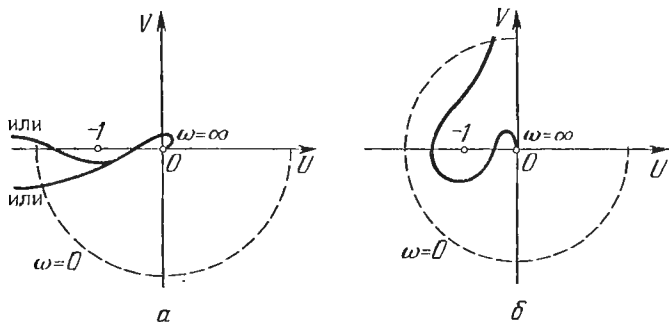


Рис. 4.25

Система с неустойчивой разомкнутой цепью. Пусть характеристический многочлен $L(s)$ разомкнутой цепи имеет l корней с положительной вещественной частью. Тогда, применяя формулу (4.21) к данному случаю, имеем

$$\Delta \arg L(j\omega) = (n - 2l) \frac{\pi}{2}.$$

Введенная выше вспомогательная функция

$$W_1(s) = 1 + W(s) = \frac{D(s)}{L_1(s)}$$

при замене $s=j\omega$, согласно критерию Михайлова для устойчивости замкнутой системы, должна иметь следующее изменение аргумента при $0 \leq \omega \leq \infty$:

$$\begin{aligned} \Delta \arg W_1(j\omega) &= \Delta \arg D(j\omega) - \Delta \arg L(j\omega) = \\ &= n \frac{\pi}{2} - (n - 2l) \frac{\pi}{2} = l\pi. \end{aligned}$$

Это значит, что для устойчивости замкнутой системы требуется, чтобы амплитудно-фазовая характеристика ра-

замкнутой цепи охватывала точку (-1) против часовой стрелки на угол $l\pi$, где l — число полюсов с положительной вещественной частью в передаточной функции неустойчивой разомкнутой цепи данной системы. Другими словами, левее точки (-1) разность между числом положительных и числом отрицательных переходов амплитудно-фазовой частотной характеристики через ось абсцисс должно равняться $l/2$.

Например, если передаточная функция разомкнутой цепи будет

$$W(s) = \frac{K(b_0 s^m + \dots + 1)}{c_0 s^n + \dots - 1},$$

т. е. имеет $l=1$ (один положительный полюс), то для устойчивости замкнутой системы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой цепи должна иметь вид, примерно показанный на рис. 4.26, а или б, а в случае $l=3$ — на рис. 4.26, в. При этом начальная точка

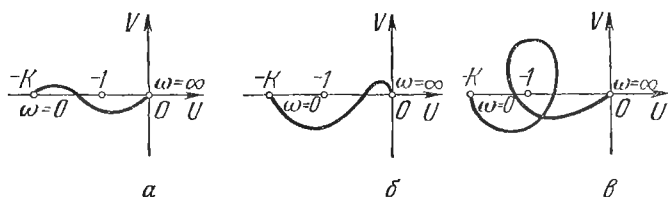


Рис. 4.26

характеристики на оси абсцисс левее (-1) считается как половина перехода.

Случай наличия пары чисто мнимых полюсов передаточной функции разомкнутой цепи. Этот случай может сочетаться со случаями расположения всех остальных полюсов слева от мнимой оси или наличия нулевого полюса, или, наконец, наличия полюсов справа. Во всех вариантах формулировки частотного критерия устойчивости замкнутой системы остаются прежними, причем разрыв характеристики в точке мнимого полюса заполняется полуокружностью бесконечного радиуса (рис. 4.27). Это вытекает из замены на плоскости s точки мнимого полюса полуокружностью малого радиуса, и образования соответствующего контура обхода, аналогично тому как на рис. 4.23 обходилась точка нулевого полюса.

Через T на рис. 4.27 обозначена постоянная времени соответствующего сомножителя ($T^2 s^2 + 1$), являющегося источником пары чисто мнимых корней в знаменателе передаточной функции $W(s)$ разомкнутой цепи.

Использование логарифмических частотных характеристик. Обратимся сначала к первым двум случаям: разомкнутая цепь системы устойчива или нейтральна (соответственно, замкнутая система без астатизма и астатическая). Как установлено выше, амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой цепи не должна охватывать точку (-1) . Это значит, что должно быть

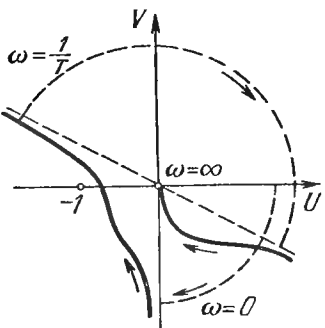


Рис. 4.27

$$A < 1 \quad \text{или} \quad L_m = 20 \lg A < 0$$

при $\varphi = -180^\circ$.

В свою очередь, это означает, что точка пересечения фазовой характеристики с линией -180° должна лежать правее частоты среза, т. е. *правее* точки пересечения амплитудной характеристики с осью абсцисс. Левее этой последней точки при сложных очертаниях ЛАХ может иметься четное число пересечений фазовой характеристики с линией -180° , как показано пунктиром на рис. 4.28, в соответствии с приведенным выше правилом равенства положительных и отрицательных переходов.

Первый график на рис. 4.28 соответствует системе без астатизма, а второй — системе с астатизмом первого порядка. Легко видеть, что пунктир на рис. 4.28, а соответствует характеристике на рис. 4.20. При подсчете точек пересечения фазовой характеристики с линией -180° надо иметь в виду, что если начало фазовой характеристики будет лежать ниже линии -180° (что соответствует рис. 4.25, б), то в число отрицательных переходов надо включать бесконечно удаленную влево точку $\omega = 0$.

Такова формулировка частотного критерия устойчивости применительно к логарифмическим характеристикам в случаях устойчивой и пейтральной разомкнутой цепи.

Осталось сказать, о случае, когда разомкнутая цепь неустойчива, т. е. $L(s)$ имеет l корней с положительной вещественной частью.

В этом случае разность между числом положительных и числом отрицательных переходов фазовой характеристики через линию -180° левее частоты среза ω_c (где

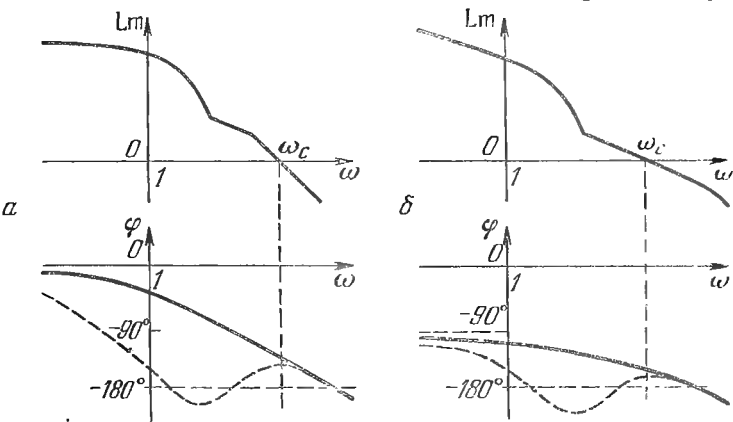


Рис. 4.28

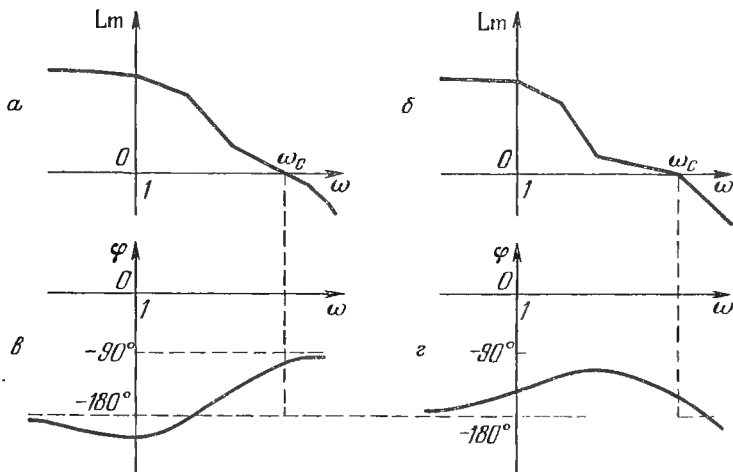


Рис. 4.29

$L_m = 0$) должно равняться $l/2$. Здесь положительным считается переход снизу вверх. При этом начало характеристики в бесконечно удаленной точке $\omega = 0$ на линии -180° считается за половину перехода.

Например, для случаев, изображенных на рис. 4.26, а, б, это выглядит так, как представлено на рис. 4.29, а, б.

Использование экспериментальных характеристик. Особенностью частотного критерия устойчивости, в отличие от предыдущих, является то, что не обязательно надо знать уравнения всех звеньев системы, а можно использовать экспериментальные данные.

Пусть, например, система должна состоять из трех блоков (рис. 4.30), причем для двух блоков имеются, допустим, уравнения или передаточные функции $W_1(s)$ и $W_3(s)$, а для одного блока (W_2) они неизвестны и очень трудно составить уравнения либо передаточную функцию, но блок уже имеется в натуре или же для него легко сделать экспериментальный макет.

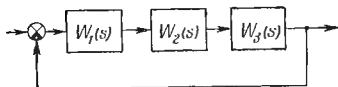


Рис. 4.30

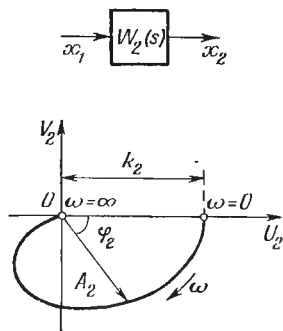


Рис. 4.31

Тогда для этого отдельно взятого блока (W_2) снимается экспериментально амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 4.31) путем подачи на вход величины

$$x_1 = \sin \omega t$$

при разных ω и замера каждый раз амплитуды A_2 и фазы φ_2 на выходе

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Полученная экспериментально характеристика перемножается с остальными, которые заданы аналитически, т. е. определяется

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) W_2(j\omega) W_3(j\omega),$$

причем для каждого определенного значения частоты ω модули (амплитуды) перемножаются, а аргументы (фазы) складываются

$$A = A_1 A_2 A_3, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3.$$

По виду полученной общей характеристики разомкнутой цепи $W(j\omega)$ на основании частотного критерия Найквиста судят о том, будет ли устойчива проектируемая из этих блоков замкнутая система.

§ 5.1. Требования качества и связь с частотными характеристиками

Исследованная выше устойчивость системы обеспечивает затухание переходных процессов с течением времени, т. е. обеспечивает принципиальную возможность прихода системы в некоторое установившееся состояние при любом внешнем возмущении.

Однако далее требуется, во-первых, чтобы это установившееся состояние было достаточно близко к заданному и, во-вторых, чтобы затухание переходного процесса было достаточно быстрым, а отклонения (колебания) при этом были бы невелики.

Поэтому после обеспечения устойчивости системы нужно позаботиться о требуемом качестве процесса управления, в понятие которого входят, в частности:

- 1) точность системы в установившемся состоянии,
- 2) качество переходного процесса.

Вообще говоря, в понятие качества системы может входить и ряд других показателей, кроме указанных основных.

Методы определения точности системы были изучены выше в главе 3 (статические и скоростные ошибки, точность при гармоническом воздействии, коэффициенты ошибок при произвольном внешнем воз-

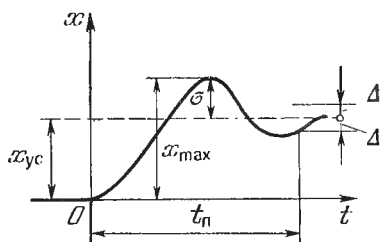


Рис. 5.1

действию). О методах определения кривой переходного процесса было сказано в § 3.1. Но при проектировании системы вначале не нужно знать деталей очертания всей кривой переходного процесса, а можно исходить из некоторых оценочных характеристик качества, таких как (см. рис. 5.1) длительность переходного процесса t_n (быстродействие

системы), величина перерегулирования σ , количество (или частота) колебаний, иногда плавность процесса (ограничение по скорости и ускорению в переходном процессе).

Теоретически переходный процесс в устойчивой линейной системе затухает в бесконечности:

$$x - x_{yc} = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Практически же длительность переходного процесса ограничивают тем моментом, когда отклонения становятся пренебрежимо малыми, например (рис. 5.1), когда величина

$$\Delta = |x - x_{yc}|$$

составляет 5 % от x_{yc} . Перерегулирование $\sigma = x_{\max} - x_{yc}$ определяется также в процентах от величины x_{yc} (скажем, 10—30 %). При $\sigma = 0$ процесс называется монотонным.

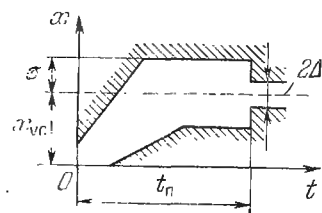


Рис. 5.2

Таким образом, в начале проектирования системы не играют роли детали очертания кривой переходного процесса, а важно, чтобы она не выходила за определенные границы, показанные, например, на рис. 5.2.

Существуют три основных вида приближенных оценок качества переходного процесса:

- 1) частотные;
- 2) корневые;
- 3) интегральные.

Прежде чем говорить о частотных оценках, надо установить *связь между частотными характеристиками системы и качеством переходного процесса*.

Будем рассматривать переходный процесс $x(t)$ при единичном скачке задающего воздействия $g(t) = 1(t)$. В изображениях по Лапласу

$$X(s) = \Phi(s) G(s), \quad G(s) = \frac{1}{s},$$

где $\Phi(s)$ — главная передаточная функция замкнутой системы,

Подставив сюда $s = j\omega$, запишем выражение интеграла Фурье (обратное преобразование Фурье):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.1)$$

Здесь $\Phi(j\omega)$ является амплитудно-фазовой частотной характеристикой замкнутой системы

$$\Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (5.2)$$

причем $P(\omega)$ — вещественная, а $Q(\omega)$ — мнимая частотные характеристики замкнутой системы.

Вычтем из (5.1) установившееся значение

$$x_{yc} = P(0)$$

(это равенство вытекает из того, что значение $\omega = 0$ соответствует постоянному значению x в установившемся состоянии).

В результате получим

$$x(t) - P(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(j\omega) - P(0)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$

Подставим сюда (5.2) и заменим $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$. Отбросив мнимую часть полученного выражения (так как $x(t)$ — вещественно), будем иметь

$$\begin{aligned} x(t) - P(0) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} [P(\omega) \sin \omega t + Q(\omega) \cos \omega t - P(0) \sin \omega t] d\omega. \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение представляет собой четную функцию. Поэтому интегрирование в пределах $(-\infty, \infty)$ можно заменить на $(0, \infty)$ и удвоить результат. Кроме того, заметим, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(0) \sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{P(0)}{2}.$$

В результате получаем

$$x(t) = \frac{P(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (5.3)$$

Поскольку даны нулевые начальные условия, причем нулевые значения функции распространяются на $t < 0$, то можно, подставив в формулу (5.3) вместо t величину $-t$, написать

$$0 = \frac{P(0)}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (5.4)$$

Складывая и вычитая выражения (5.3) и (5.4), приходим к формулам соответственно

$$\begin{aligned} x(t) &= P(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega, \\ x(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Последняя формула будет использована ниже для частотных оценок качества переходного процесса. Отметим, что существуют приближенные способы построения кривой переходного процесса в замкнутой системе по этой формуле.

Приведем здесь также частотный способ определения *весовой функции замкнутой системы*. Как известно (см. § 1.1), если переходный процесс $x(t)$ определен при задающем воздействии $g(t) = 1(t)$, то имеет место соотношение

$$k_x(t) = \frac{dx}{dt}.$$

Поэтому, дифференцируя выражение (5.5), находим

$$k_x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (5.6)$$

Существует приближенный способ вычислений по этой формуле.

Аналогично можно найти и весовую функцию замкнутой системы $k_f(t)$ для возмущающего воздействия.

Знание весовых функций замкнутой системы $k_x(t)$ и $k_f(t)$ позволяет согласно формуле (3.8) определять вынужденную часть процесса регулирования при любых внешних воздействиях $g(t)$ и $f(t)$.

Ниже рассматриваются различные формы оценок качества переходного процесса в замкнутой системе. Какие из них применять на практике — зависит от того, какой материал уже имеется в распоряжении относительно данной системы, а также от того, какими методами предполагается вести дальнейший процесс проектирования системы.

§ 5.2. Частотные оценки качества

Простейшей из частотных оценок качества переходного процесса является *запас устойчивости*. Он определяет только степень близости замкнутой системы к границе устойчивости по виду частотных характеристик ее разомкнутой цепи.

На рис. 5.3, *а* показано, как находить запас по амплитуде ΔL_m и запас по фазе $\Delta \varphi$ по логарифмическим частотным характеристикам. Если перенести их на амплитудно-фазовую частотную характеристику, то это будет соответственно ΔA и $\Delta \varphi$ (рис. 5.3, *б*).

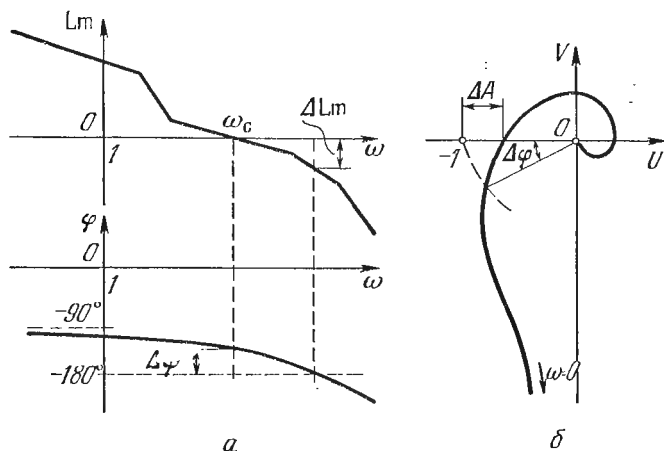


Рис. 5.3

Длительность переходного процесса и перерегулирование можно приближенно оценить по виду вещественной частотной характеристики замкнутой системы $P(\omega)$. Получение ее рассмотрено выше в § 2.4.

На основании зависимости (5.5) выведены следующие оценки.

В переходном процессе получится перерегулирование $\sigma > 18\%$, если $P(\omega)$ имеет «горб» (рис. 5.4, а). При отсутствии «горба» (рис. 5.4, б) будет $\sigma < 18\%$. Процесс окажется наверняка монотонным ($\sigma = 0$), если $\frac{dP}{d\omega} < 0$ и монотонно убывает по абсолютному значению (рис. 5.4, в).

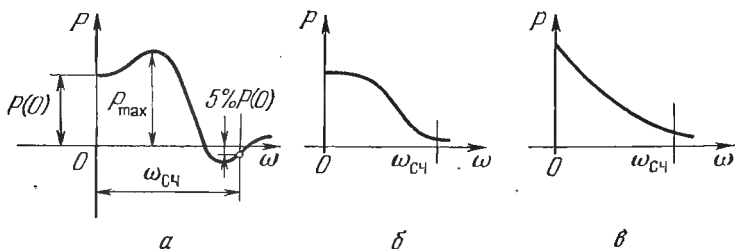


Рис. 5.4

Длительность переходного процесса t_n оценивается приблизительно по величине интервала существенных частот $\omega_{сч}$ (рис. 5.4), причем

$$\frac{\pi}{\omega_{сч}} < t_n < \frac{4\pi}{\omega_{сч}}.$$

Важно отметить, что время t_n обратно пропорционально величине $\omega_{сч}$, т. е. чем более растянута частотная характеристика, тем короче переходный процесс. Физически это связано с тем, что, чем более высокие частоты «пропускает» система, тем она менее инерционна в своих реакциях на внешние воздействия.

Это же свойство позволяет связать время t_n с частотой среза ω_c (рис. 5.3) характеристики разомкнутой цепи. Длительность переходного процесса t_n тем меньше, чем больше частота среза ω_c . Зависимость между величинами σ , t_n , ω_c и $P_{\max}$ представлена графиком на рис. 5.5.

Кроме того, свойство частотных характеристик таково, что начальная их часть влияет в основном на очертание конца переходного процесса $x(t)$, причем $P(0) = x_{yc}$ (рис. 5.4). Основное же влияние на качество переходного процесса оказывает форма средней части частотной характеристики.

В связи с этим логарифмическую частотную характеристику разомкнутой цепи системы $Lm(\omega)$ делят на три

области (рис. 5.6), причем область *низких частот* в основном определяет *точность* в установившемся режиме (в частности, астатизм и установившуюся ошибку на рабочей частоте следящей системы). Область *средних частот* в основном определяет *качество переходного процесса*. В частности, частота среза ω_c , как уже говорилось,

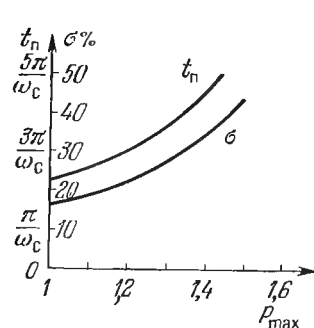


Рис. 5.5

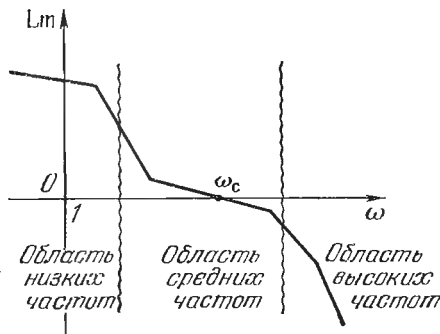


Рис. 5.6

определяет полосу пропускания сигналов и длительность переходного процесса. Наклон $Lm(\omega)$ вблизи частоты среза ω_c характеризует колебательность переходного процесса. Так, наклон -20 дБ/дек при $\omega = \omega_c$ (рис. 5.6), соответствующий свойствам апериодического звена, обеспечивает наименьшую колебательность переходного процесса в замкнутой системе.

Следующей частотной оценкой качества является показатель *колебательности* — максимальное значение $M_{\max}$ амплитудной частотной характеристики замкнутой системы (рис. 5.7)

$$M = |\Phi(j\omega)|.$$

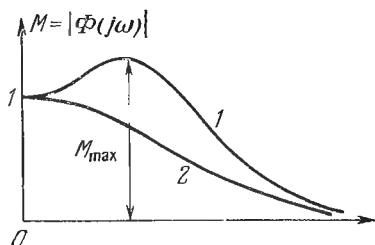


Рис. 5.7

Эта величина $M_{\max}$ может быть определена по виду частотной характеристики разомкнутой цепи данной системы. В самом деле

$$M = \left| \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} \right| = \left| \frac{U + jV}{1 + U + jV} \right| = \sqrt{\frac{U^2 + V^2}{(1 + U)^2 + V^2}}.$$

Отсюда

$$U^2 + V^2 = M^2[(1 + U)^2 + V^2] \quad (5.7)$$

или

$$(U + C)^2 + V^2 = R^2,$$

где

$$C = \frac{M^2}{M^2 - 1}, \quad R = \frac{M}{M^2 - 1}. \quad (5.8)$$

Следовательно, линии равных значений величины M , нанесенные на плоскости $W(j\omega)$, будут окружностями со смещающимся центром C и меняющимся радиусом R , как показано на рис. 5.8.

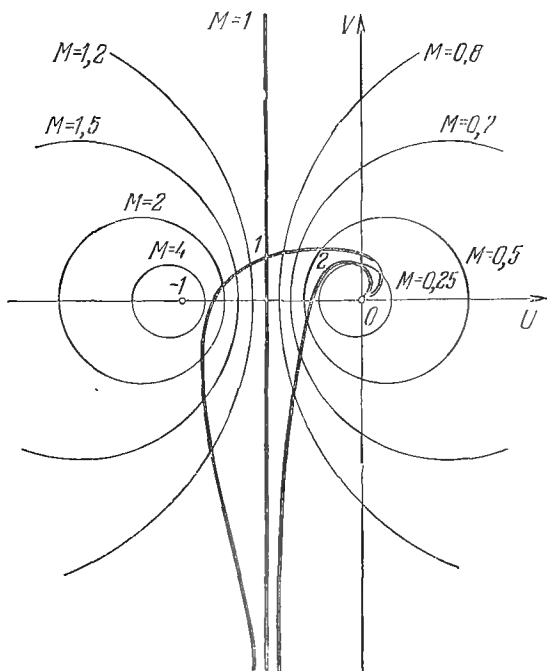


Рис. 5.8

Имея такую диаграмму линий $M = \text{const}$, можно по заданной амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой цепи $W(j\omega)$ легко определить показатель колебательности замкнутой системы $M_{\max}$ и построить всю амплитудную частотную характеристику $M = |\Phi(j\omega)|$ замкнутой системы (рис. 5.7).

Изображенные на рис. 5.8 характеристики $W(j\omega)$ (1 и 2) соответствуют характеристикам 1 и 2 замкнутой системы $|\Phi(j\omega)|$ (рис. 5.7).

Если, например, желательно иметь $M_{\max} < 1,5$, то характеристику 1 (рис. 5.8) нужно скорректировать так, чтобы она не заходила внутрь круга $M=1,5$ (рис. 5.9).

Такую запретную область можно перенести на плоскость логарифмической частотной характеристики следующим образом. На кривой $M=1,5$ (рис. 5.9) в каждой

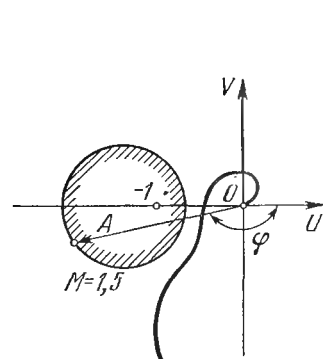


Рис. 5.9

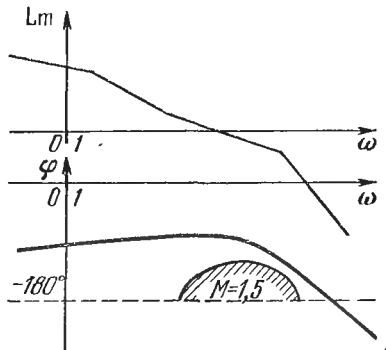


Рис. 5.10

точке имеем определенное значение амплитуды A и фазы φ . Следовательно, зная $Lm(\omega)$ (рис. 5.10), можем для каждого значения $Lm = 20 \lg A$ отметить там соответствующую точку φ . Таким образом, образуется кривая $M=1,5$ на поле логарифмических характеристик, очерчивающая запретную зону, в которую не должна заходить фазовая частотная характеристика $\varphi(\omega)$.

§ 5.3. Корневые оценки качества

Корневыми оценками называются такие, которые основываются на расположении корней характеристического уравнения замкнутой системы, т. е. полюсов передаточной функции замкнутой системы, а также и нулей этой передаточной функции.

Простейшей корневой оценкой качества является *степень устойчивости* — расстояние η от мнимой оси до ближайшего корня на плоскости корней λ характеристического уравнения замкнутой системы (рис. 5.11). Если ближайшим является вещественный корень (рис. 5.11, а),

то ему соответствует апериодическая составляющая решения для переходного процесса

$$C_1 e^{-\eta t}$$

(апериодическая степень устойчивости η). Время ее затухания

$$t_{\text{н}} = \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta} \approx \frac{3}{\eta} \quad (\text{при } \Delta = 5\%) \quad (5.9)$$

характеризует общую длительность переходного процесса, так как все члены решения, соответствующие остальным корням, затухают быстрее.

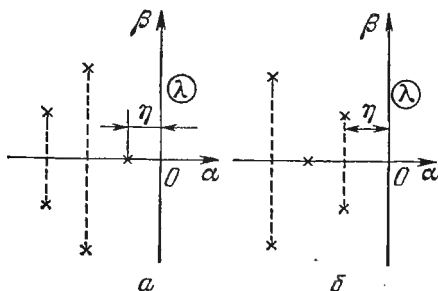


Рис. 5.11

Если же ближайшей к мнимой оси окажется пара комплексных корней (рис. 5.11, б), то доминирующая составляющая решения для переходного процесса

$$C_1 e^{-\eta t} \sin(\beta_1 t + C_2)$$

будет колебательной (колебательная степень устойчивости η), причем оценка длительности переходного процесса $t_{\text{н}}$ остается прежней (5.9).

Определяется величина степени устойчивости следующим образом. Вводится новая комплексная переменная $z = \lambda + \eta$ (рис. 5.12). Тогда на плоскости z мнимая ось β' пройдет через ближайшие корни, т. е. составленное относительно z характеристическое уравнение должно удовлетворять условию нахождения на границе устойчивости.

Таким образом, если задано характеристическое уравнение

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (5.10)$$

то подставив $\lambda = z - \eta$, а именно

$$a_0(z - \eta)^n + a_1(z - \eta)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(z - \eta) + a_n = 0,$$

получим новое уравнение, которое называется *смещенным*, в виде

$$a_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n = 0, \quad (5.11)$$

где коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_n$ являются функциями η . Их можно вычислить следующим образом:

$$A_n = D(-\eta), A_{n-1} = \frac{D'(-\eta)}{1!}, \dots, A_1 = \frac{D^{(n-1)}(-\eta)}{(n-1)!}, \quad (5.12)$$

что вытекает из представления выражения (5.11) как результата разложения функции $D(\lambda)$ (5.10) при $\lambda = z - \eta$ в ряд Тейлора.

Затем к уравнению (5.11) применяется условие границ устойчивости, например, по Гурвицу

$$A_n(\eta) = 0 \text{ и } \Delta_{n-1}(\eta) = 0, \quad (5.13)$$

откуда и определяется величина η . Ниже будет дана диаграмма степени устойчивости для системы третьего порядка.

Колебательность переходного процесса определяется величиной

$$\mu = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|,$$

где α и β — вещественная и мнимая части корней характеристического уравнения. Именно эта величина характеризует быстроту затухания колебаний за каждый период. В самом деле, паре комплексных корней $\lambda_{1,2} = -|\alpha| \pm j\beta$ соответствует составляющая решения переходного процесса

$$C_1 e^{-|\alpha|t} \sin(\beta t + C_2).$$

Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Через один период амплитуда $C_1 e^{-|\alpha|t}$ уменьшается до

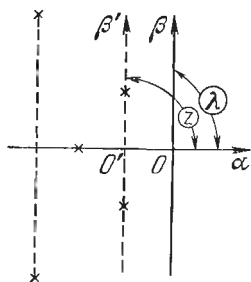


Рис. 5.12

$$C_1 e^{-|\alpha| \left(t + \frac{2\pi}{\beta} \right)} = C_1 e^{-|\alpha| t} e^{-2\pi \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|}.$$

Следовательно, чем больше величина $\mu = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|$, названная колебательностью, тем слабее будет затухание колебаний в переходном процессе. Линия $\mu = \text{const}$ образует центральный угол (рис. 5.13, а) на комплексной плоскости.

Суммарное требование определенных значений степени устойчивости η и колебательности μ приводит к области, изображенной на рис. 5.13, б, внутри которой должны

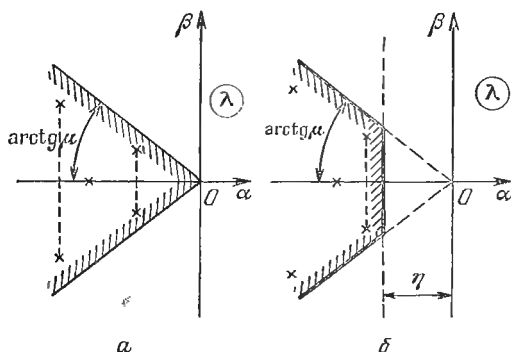


Рис. 5.13

лежать все корни характеристического уравнения замкнутой системы.

Далее необходимо иметь в виду, что для определения качества переходного процесса при единичном скачке внешнего воздействия существенны не только корни характеристического уравнения, т. е. полюса, но также и нули передаточной функции замкнутой системы $\Phi(s)$. В самом деле, как мы знаем,

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{KN(s)}{D(s)}, \quad D(s) = L(s) + KN(s).$$

Воспользуемся формулой (3.10), разложив многочлен $N(s_i)$ на множители

$$x(t) = \frac{KN(0)}{D(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{Kb_0 (s_i - N_1) (s_i - N_2) \dots (s_i - N_m)}{s_i D'(s_i)} e^{s_i t}. \quad (5.14)$$

где $s_i = \lambda_i$ полюса $\Phi(s)$, т. е. корни характеристического уравнения $D(\lambda) = 0$; через $N_1, N_2, \dots, N_m$ обозначены нули (корни) многочлена $N(s)$.

Отсюда видно, что амплитуды отклонений в переходном процессе, стоящие под знаком суммы, будут тем меньше, чем ближе расположены нули N_j к полюсам s_i , т. е. корни многочлена $N(s)$ к корням характеристического уравнения. Именно в этом случае величины $(s_i - N_j)$ будут малы. Это соответствует, например, схеме рис. 5.14, где нули обозначены кружочками. Заметим, что нули для замкнутой системы совпадают с нулями разомкнутой цепи $W(s)$, так как

$$\Phi(s) = \frac{KN(s)}{D(s)}, \quad W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)},$$

а полюса $\Phi(s)$ и $W(s)$ существенно отличаются друг от друга.

Итак, для уменьшения амплитуд отклонений в переходном процессе желательно, чтобы нули передаточной функции замкнутой системы $\Phi(s)$ располагались вблизи ее полюсов.

Примером корневых оценок качества переходного процесса в системах третьего порядка является диаграмма Вышнеградского (дана в его работе 1876 г., положившей начало развитию теории автоматического регулирования).

Характеристическое уравнение системы третьего порядка

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad (5.15)$$

приводится к нормированному виду

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0, \quad (5.16)$$

где

$$q = \lambda \sqrt[3]{\frac{a_0}{a_3}}, \quad A = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 a_3}}, \quad B = \frac{a_2}{\sqrt{a_0 a_3^2}}. \quad (5.17)$$

Параметры Вышнеградского A и B представляют, следовательно, определенные комбинации реальных параметров системы, входящих в коэффициенты характеристического уравнения.

На плоскости параметров A, B граница устойчивости выразится зависимостью $AB = 1$ (гипербола). Область устойчивости $AB > 1$ разбивается на три подобласти

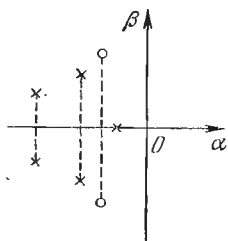


Рис. 5.14

(рис. 5.15) с различным расположением корней характеристического уравнения и соответственно — очертаний переходного процесса. При этом граничные линии CE и

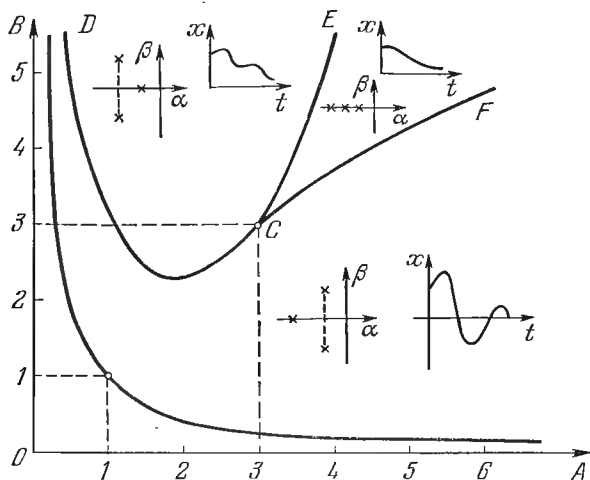


Рис. 5.15

CF находятся приравниванием нулю дискриминанта формулы Кардана (решения кубического уравнения) в виде

$$A^2B^2 - 4(A^2 + B^2) + 18AB - 27 = 0,$$

а линия CD — из равенства вещественных частей всех корней —

$$2A^3 - 9AB + 27 = 0, \quad A < 3.$$

В точке C (3; 3) все три корня вещественны и равны -1 .

Позднее на диаграмму Вышнеградского были нанесены линии равных значений степени устойчивости η и линии равных значений колебательности μ .

При определении степени устойчивости смещенное уравнение для нормированного характеристического уравнения (5.16) будет

$$z^3 + A_1z^2 + A_2z + A_3 = 0,$$

где согласно формулам (5.12)

$$A_3 = -\eta^3 + A\eta^2 - B\eta + 1,$$

$$A_2 = 3\eta^2 - 2A\eta + B, \quad A_1 = -3\eta + A.$$

Два условия (5.13) принимают соответственно вид

$$-\eta^3 + A\eta^2 - B\eta + 1 = 0, \quad (5.18)$$

$$(-3\eta + A)(3\eta^2 - 2A\eta + B) + \eta^3 - A\eta^2 + B\eta - 1 = 0. \quad (5.19)$$

Полагая $\eta = \text{const}$, нанесем линии равных значений η на плоскость параметров Вышнеградского A, B . При этом

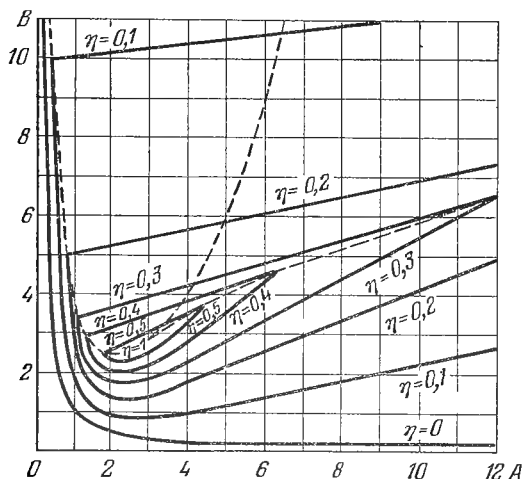


Рис. 5.16

согласно уравнению (5.18) получим для разных конкретных значений η прямые линии, а согласно уравнениям (5.19) — кривые (рис. 5.16).

Для определения линий равных значений величины колебательности μ системы третьего порядка (5.16), когда корни его

$$q_{1,2} = -\alpha_1 \pm j\beta_1, \quad q_3 = -\alpha_2 \quad (\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0),$$

имея в виду, что $\mu = \beta_1/\alpha_1$, по формулам Виета запишем

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = A_1, \quad 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2(1 + \mu^2) = B_1,$$

$$\alpha_1^2\alpha_2(1 + \mu^2) = 1.$$

Исключая α_1 и α_2 , обозначив $\kappa = 1 + \mu^2$, получим уравнение

$$4\kappa^2(A^3 + B^2) - \kappa^3 A^2 B^2 + (2\kappa^3 - 4\kappa^2 - 16\kappa)AB - \kappa^3 + 12\kappa^2 - 48\kappa + 64 = 0, \quad (5.20)$$

которое позволяет построить на поле диаграммы Вышнеградского AB линии равных значений $\mu = \sqrt{\eta - 1}$ (рис. 5.17) в областях, где имеются комплексные корни.

Если нам требуется в системе третьего порядка выбрать параметры так, чтобы получить заданное качество

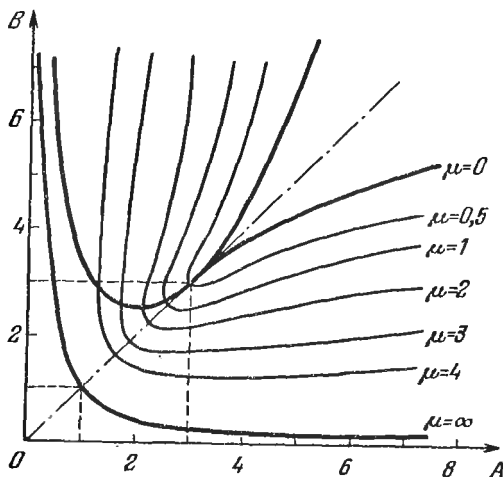


Рис. 5.17

переходного процесса по показателям η и μ , мы выбираем на рис. 5.16 и 5.17 соответствующую точку. Найдя таким образом значения A и B , пользуемся затем формулами (5.17) для подбора параметров системы (5.15).

§ 5.4. Интегральные оценки качества

Интегральными оценками качества называются такие, которые одним числом оценивают и величины отклонений, и время затухания переходного процесса. Будем отклонение x в переходном процессе отсчитывать от нового установившегося состояния, так что $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Для монотонного процесса (рис. 5.18) интегральной оценкой может служить площадь под кривой переходного процесса, т. е.

$$I_1 = \int_0^{\infty} x(t) dt. \quad (5.24)$$

Этот интеграл имеет конечное значение для любого решения $x(t)$ линейного уравнения. Здесь процесс будет считаться тем лучше, чем меньше число I_1 .

Однако такая оценка не годится для колебательного процесса, так как нижние площади при вычислении интеграла (5.21) будут вычитаться из верхних (рис. 5.19).

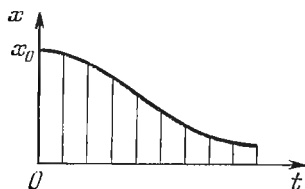


Рис. 5.18

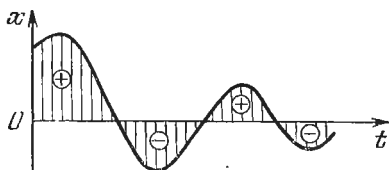


Рис. 5.19

Поэтому по минимуму величины I_1 наилучшим оказался бы процесс с незатухающими колебаниями, что недопустимо.

В связи с этим в общем случае принимают *квадратичную интегральную оценку* качества в виде

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2(t) dt. \quad (5.22)$$

В литературе имеются формулы, выражающие величину I_2 непосредственно через коэффициенты дифференциального уравнения замкнутой системы.

Очевидно, что стремление оценки I_2 к нулю приближает кривую процесса к скачку (рис. 5.20), ибо именно при этом уменьшается квадратичная площадь, ограниченная кривой. Однако это, в свою очередь, вызывает значительное увеличение скорости (рывок скорости) в начальной части процесса. Чтобы получить быстро затухающий, но достаточно плавный процесс, вводят *улучшенную квадратичную интегральную оценку* качества

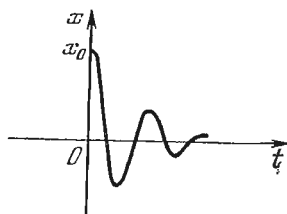


Рис. 5.20

$$I_K = \int_0^{\infty} (x^2 + T^2 \dot{x}^2) dt, \quad (5.23)$$

где T назначается в соответствии с заданием желаемых свойств переходного процесса.

В самом деле, покажем, что при стремлении уменьшить величину этой оценки кривая переходного процесса приближается к экспоненте с желаемой постоянной времени T . Для этого сделаем следующие преобразования:

$$I_K = \int_0^{\infty} (x^2 + T^2 \dot{x}^2) dt = \int_0^{\infty} (x + T\dot{x})^2 dt - \int_0^{\infty} 2Tx\dot{x} dt = \int_0^{\infty} (x + T\dot{x})^2 dt + Tx_0^2.$$

Наименьшее возможное значение I_K будет при $x + T\dot{x} = 0$.

Решение этого дифференциального уравнения

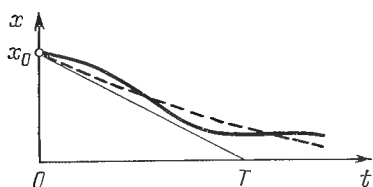


Рис. 5.21

$$x = x_0 e^{-t/T}$$

и будет той экспонентой (пунктирная кривая на рис. 5.21), к которой приближается переходный процесс при стремлении уменьшить значение интегральной оценки I_K .

Применяются и другие виды интегральных оценок качества

$$I = \int_0^{\infty} (x^2 + a^2 \dot{x}^2 + b^2 \ddot{x}^2) dt,$$

$$I = \int_0^{\infty} (a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + \dots + a_n^2 x_n^2) dt,$$

где $x_1, \dots, x_n$ — переменные, характеризующие состояние системы. В общем случае

$$I = \int_0^{\infty} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j dt.$$

В качестве интегральных критериев используются и функционалы более общего вида. Иногда в выражение интегральной оценки вводится время t в явном виде.

Интегральные критерии применяются в теории оптимальных систем автоматического управления.

КОРРЕКТИРУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА И МЕТОДЫ ИХ СИНТЕЗА

§ 6.1. Последовательные корректирующие устройства

Для того, чтобы добиться желаемого качества процесса управления или регулирования, т. е. требуемой точности системы и качества переходного процесса, есть два способа. Первый состоит в том, чтобы достигнуть этого путем изменения параметров данной системы, так как с изменением параметров меняются соответственно коэффициенты уравнения и частотные характеристики, а значит, и качество процесса.

Если же путем изменения параметров не удастся получить желаемый результат, то надо применить второй способ — изменить структуру системы, введя дополнительные звенья — корректирующие устройства.

Основная задача корректирующих устройств состоит в улучшении точности системы и качества переходных процессов. Однако наряду с этим путем введения корректирующих устройств можно решать и более общую задачу — сделать систему устойчивой, если она была без них неустойчивой, а затем добиться и желаемого качества процесса регулирования.

Различают четыре основных вида корректирующих устройств.

1. *Последовательные корректирующие устройства* или, как их еще называют, *корректирующие фильтры*, которые могут описываться различными передаточными функциями $W_k(s)$ (рис. 6.1). Тогда общая передаточная функция разомкнутой цепи системы будет

$$W(s) = W_k(s) W_0(s), \quad (6.1)$$

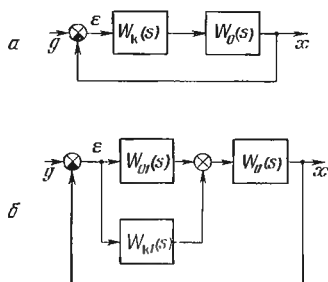


Рис. 6.1

причем во втором варианте (рис. 6.1, б) имеем

$$W_{\kappa}(s) = W_{01}(s) + W_{\kappa 1}(s),$$

где нуликами отмечены передаточные функции заданных частей системы.

2. *Параллельные корректирующие устройства*, осуществляемые в виде дополнительных местных обратных связей $W_{oc}(s)$ (рис. 6.2), когда

$$W_{\kappa}(s) = \frac{W_{01}(s) W_0(s)}{1 + W_{oc}(s) W_{01}(s)}. \quad (6.2)$$

3. *Корректирующие устройства по внешнему воздействию*.

4. *Неединичная главная обратная связь*.

Передаточная функция корректирующего устройства $W_{\kappa}(s)$ или $W_{oc}(s)$ может иметь, вообще говоря, произвольный вид. Но наиболее часто применяются определенные типы корректирующих устройств, которые мы и рассмотрим.

В этом параграфе изучим некоторые типовые последовательные корректирующие устройства (фильтры).

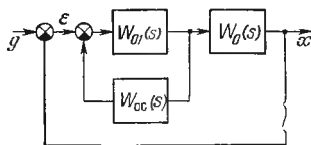


Рис. 6.2

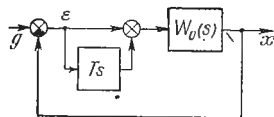


Рис. 6.3

Введение производной от ошибки — простейший метод улучшения качества переходного процесса. Структурно введение производной представлено на рис. 6.3. Технически это может быть осуществлено различными устройствами, причем производная может осуществляться не в чистом виде, а с инерционностью, например, в виде $\frac{Ts}{Ts + 1}$.

Передаточная функция разомкнутой цепи (рис. 6.3) с идеальной производной будет

$$W(s) = (Ts + 1) W_0(s).$$

Заменив $s = j\omega$, получим амплитуду и фазу в виде

$$A(\omega) = A_0(\omega) \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}, \quad \varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) + \operatorname{arctg} T\omega.$$

Существенным здесь является то, что при введении воздействия по производной добавляется положительная фаза. Вследствие этого радиус-векторы амплитудно-фазовой характеристики (рис. 6.4, а) поворачиваются против часовой стрелки, увеличивая запас устойчивости и улучшая качество переходного процесса. То же самое легко

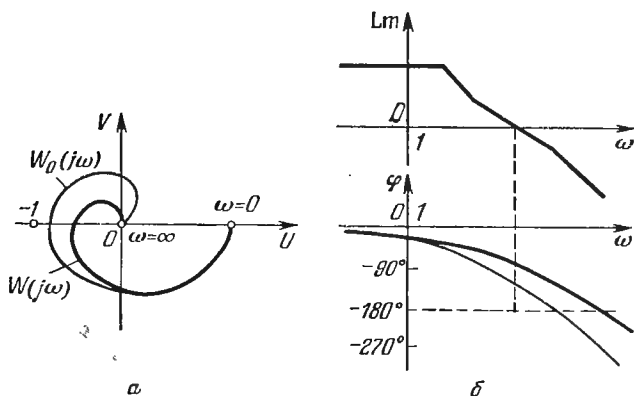


Рис. 6.4

проследить и на логарифмических характеристиках (рис. 6.4, б).

В случае неидеального дифференцирования (с инерционностью) этот эффект несколько уменьшается количественно, но качественно он сохраняется.

Заметим, что введение производной от ошибки может служить и стабилизирующим средством, т. е. превращать неустойчивую замкнутую систему в устойчивую. Например, если на рис. 6.4, а точка -1 лежала бы внутри характеристики $W_0(j\omega)$, то новая характеристика $W(j\omega)$ уже могла бы не охватывать точку -1 .

Увеличение общего коэффициента усиления K разомкнутой цепи является методом повышения точности системы. Как видно из главы 3, при этом уменьшаются все виды установившихся ошибок системы. Увеличение K осуществляется последовательным введением усилительного звена в общую цепь. Но увеличение K ведет, как известно, к ухудшению условия устойчивости, а значит, и качества переходного процесса. Поэтому часто приходится это делать одновременно с введением производной.

Введение интеграла от ошибки является методом создания или повышения порядка астатизма системы, а значит, и увеличения ее точности (рис. 6.5). Передаточная функция будет

$$W(s) = \frac{1}{s} W_0(s).$$

Подставив $s = j\omega$, получим

$$A(\omega) = \frac{A_0(\omega)}{\omega}, \quad \varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) - 90^\circ.$$

Вследствие поворота фазы на -90° ухудшаются условия устойчивости и качество переходного процесса (см. рис. 6.6, а и б). Иногда это может повести и к неустойчивости замкнутой системы, если на рис. 6.6, а точка -1 окажется внутри характеристики $W(j\omega)$, хотя $W_0(j\omega)$ не охватывает эту точку.

В случае введения двойного интеграла (рис. 6.7) в систему с передаточной функцией вида

$$W_0(s) = \frac{K}{L(s)}$$

(без производной в числителе) получаем

$$W(s) = \frac{K}{s^2 L(s)},$$

и характеристическое уравнение замкнутой системы

$$\lambda^2 L(\lambda) + K = 0. \quad (6.3)$$

Эта система будет *структурно неустойчивой* (неустойчивой при любых значениях параметров), так как в характеристическом уравнении (6.3) отсутствует член с первой степенью λ . Поэтому астатизм второго порядка реально возможен только при условии введения производных в закон управления, т. е. при наличии некоторого многочлена $N(s)$ в числителе передаточной функции.

Изодромное корректирующее устройство (рис. 6.8) имеет передаточную функцию вида

$$W_K(s) = \frac{T_s + 1}{T_s s},$$

объединяя в себе введение интеграла и производной. Оно

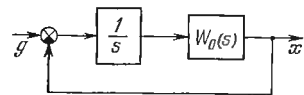


Рис. 6.5

позволяет избежать недостатков предыдущего устройства и получать необходимый порядок астатизма системы, сохраняя устойчивость и качество ее.

Частотные логарифмические характеристики изодромного устройства имеют показанный на рис. 6.9 вид.

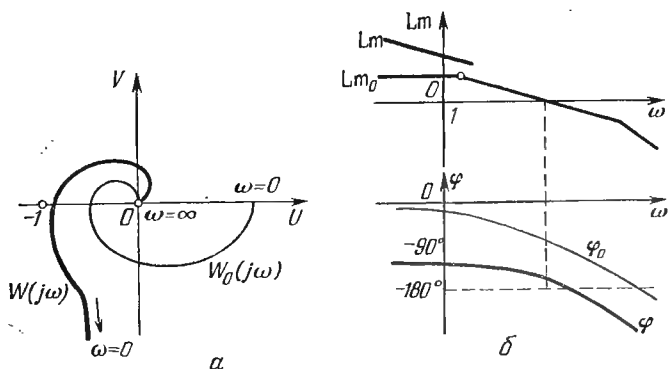


Рис. 6.6

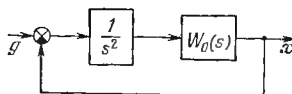


Рис. 6.7

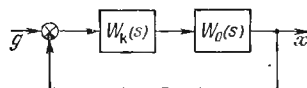


Рис. 6.8

Из них видно, что это устройство изменяет лишь низкочастотную часть амплитудной характеристики, влияющую на точность системы (повышает ее), а отрицательный сдвиг фазы в части, существенной для условий устойчивости, невелик.

Поскольку можно записать

$$W_k(s) = \frac{Ts + 1}{Ts} = 1 + \frac{1}{Ts},$$

то структурно изодромное устройство можно представить, как изображено на рис. 6.10. Следовательно, если в случае простого введения интеграла (рис. 6.5) регулирование в системе производится не по величине ошибки ε , а только по интегралу от нее, то при изодромном устройстве мы получаем регулирование по ошибке и по инте-

граву (аналогично тому, как на рис. 6.3, было показано регулирование по ошибке и по ее производной).

Техническое осуществление изодромного устройства может быть различным (механическое, электрическое и др. устройства).

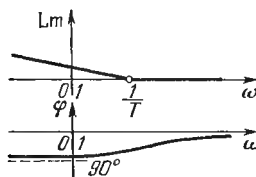


Рис. 6.9

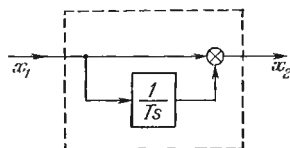


Рис. 6.10

Возможны и более сложные передаточные функции последовательных корректирующих устройств — фильтров [45].

§ 6.2. Параллельные корректирующие устройства

Рассмотрим параллельные корректирующие устройства в виде обратных связей (рис. 6.2).

Основные виды корректирующих обратных связей следующие:

а) жесткая обратная связь

$$W_{oc} = k_{oc},$$

б) инерционная жесткая обратная связь

$$W_{oc}(s) = \frac{k_{oc}}{T_{oc}s + 1}$$

в) гибкая обратная связь

$$W_{oc}(s) = k_{oc}s,$$

г) инерционная гибкая обратная связь

$$W_{oc}(s) = \frac{k_{oc}s}{T_{oc}s + 1}.$$

Возможны и более сложные передаточные функции корректирующих обратных связей.

Проиллюстрируем на примерах основные свойства этих обратных связей при охвате ими различных типов звеньев.

Положительная жесткая обратная связь. Пусть она охватывает апериодическое звено (рис. 6.11), т. е.

$$W_0(s) = \frac{k}{Ts + 1}, \quad W_{oc} = k_{oc}.$$

Тогда общая передаточная функция будет

$$W(s) = \frac{W_0(s)}{1 - W_{oc}(s) W_0(s)} = \frac{k}{Ts + 1 - kk_{oc}}$$

или

$$W(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1},$$

где

$$k_1 = \frac{k}{1 - kk_{oc}}, \quad T_1 = \frac{T}{1 - kk_{oc}}. \quad (6.4)$$

Следовательно, положительная обратная связь может служить для увеличения коэффициента усиления. Но надо иметь в виду, что одновременно с этим увеличивается и постоянная времени, т. е. инерционность звена, а при $k_{oc} > \frac{1}{k}$ звено становится неустойчивым.

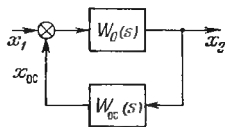


Рис. 6.11

Отрицательная жесткая обратная связь. При охвате ею апериодического звена получаем

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1 + kk_{oc}} = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, \quad (6.5)$$

где

$$k_1 = \frac{k}{1 + kk_{oc}}, \quad T_1 = \frac{T}{1 + kk_{oc}}.$$

Следовательно, отрицательная жесткая обратная связь уменьшает инерционность звена. Тем самым она улучшает качество переходного процесса в системе и может оказывать стабилизирующее действие, т. е. превращать неустойчивую замкнутую систему в устойчивую (подобно введению производной). Уменьшение же коэффициента усиления k_1 при этом может быть скомпенсировано за счет других звеньев системы.

При охвате *интегрирующего звена* отрицательной жесткой обратной связью, т. е. при

$$W_0(s) = \frac{k}{s}, \quad W_{oc} = k_{oc},$$

получаем

$$W(s) = \frac{W_0(s)}{1 + W_{oc}(s)W_0(s)} = \frac{k}{s + kk_{oc}} = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, \quad (6.6)$$

где

$$k_1 = \frac{1}{k_{oc}}, \quad T_1 = \frac{1}{kk_{oc}}.$$

Видно, что под действием жесткой обратной связи теряется интегрирующее свойство звена, и оно превращается в апериодическое с коэффициентом усиления, который целиком определяется только обратной связью. Постоянная времени T_1 будет мала при большом коэффициенте усиления звена k .

Указанный способ введения обратной связи применяется на практике, например, в приводных устройствах, чтобы сделать угол поворота выходного вала пропорциональным управляющему сигналу (напряжению).

Далее без специальных оговорок будем рассматривать только отрицательные обратные связи.

Инерционная жесткая обратная связь. При охвате ею интегрирующего звена

$$W_0(s) = \frac{k}{s}, \quad W_{oc}(s) = \frac{k_{oc}}{T_{oc}s + 1},$$

приходим к следующему выражению:

$$W(s) = \frac{k(T_{oc}s + 1)}{T_{oc}s^2 + s + kk_{oc}} = \frac{k_1(T_{oc}s + 1)}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}, \quad (6.7)$$

где

$$k_1 = \frac{1}{k_{oc}}, \quad T_1^2 = \frac{T_{oc}}{kk_{oc}}, \quad T_2 = \frac{1}{kk_{oc}}.$$

Следовательно, в данном случае интегрирующее звено превращается в звено второго порядка с введением производной. При этом коэффициент усиления k_1 и инертность введения производной T_{oc} целиком определяют обратную связь, а первичный коэффициент усиления звена k влияет на новые постоянные времени T_1 и T_2 ,

которые будут тем меньше, чем больше k . Поэтому при большом k охват интегрирующего звена инерционной жесткой обратной связью эквивалентен усилительному звену с введением производной. При этом

$$W(s) \approx \frac{T_{oc} + 1}{k_{oc}}.$$

Отсюда вытекает и хорошее влияние инерционной обратной связи на качество переходного процесса в системе в целом.

Гибкая обратная связь. При охвате сго колебательного звена, т. е.

$$W_0(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}, \quad W_{oc}(s) = k_{oc}s,$$

имеем

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\zeta_1 Ts + 1}, \quad (6.8)$$

где

$$2\zeta_1 Ts = 2\zeta Ts + k k_{oc} s, \quad \zeta_1 = \zeta + \frac{k k_{oc}}{2T}.$$

Как видно, в этом случае увеличивается демпфирование колебательного звена (ибо $\zeta_1 > \zeta$), причем не меняется коэффициент усиления. Процесс становится менее колебательным и может превратиться в апериодический (если $\zeta_1 \geq 1$).

Заместим, что если имеется *апериодическое звено*, то охватывать сго отдельно гибкой обратной связью нет смысла, так как это только увеличит его инерционность (постоянную времени).

При охвате *инерционного интегрирующего звена* гибкой обратной связью, т. е.

$$W_0(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)}, \quad W_{oc}(s) = k_{oc}s,$$

имеем

$$W(s) = \frac{k}{s(Ts + 1) + k k_{oc} s} = \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)} \quad (6.9)$$

где

$$T_1 = \frac{T}{1 + k k_{oc}}, \quad k_1 = \frac{k}{1 + k k_{oc}},$$

т. е. сохраняются тот же тип интегрирующего звена, но с уменьшенной инерционностью.

Инерционная гибкая обратная связь. При охвате ею инерционного интегрирующего звена, т. е.

$$W_0(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)}, \quad W_{oc}(s) = \frac{k_{oc}}{T_{oc}s + 1},$$

имеем

$$W(s) = \frac{k(T_{oc}s + 1)}{s[TT_{oc}s^2 + (T_1 + T_{oc})s + 1 + kk_{oc}]} = \frac{k_1(T_{oc}s + 1)}{s(T_2s^2 + T_1s + 1)}, \quad (6.10)$$

где

$$k_1 = \frac{k}{1 + kk_{oc}}, \quad T_2^2 = \frac{TT_{oc}}{1 + kk_{oc}}, \quad T_1 = \frac{T + T_{oc}}{1 + kk_{oc}}.$$

Здесь при сохранении интегрирующего свойства звена получается эффект введения производной, т. е. интегрирующее звено *становится изобромным*, а новые постоянные времени T_2 и T_1 , характеризующие инерционность звена, могут быть сделаны малыми за счет большого первичного коэффициента усиления k . В последнем случае имеем

$$k_1 \approx \frac{1}{k_{oc}}, \quad W(s) \approx \frac{T_{oc}s + 1}{k_{oc}s}.$$

Можно заметить, вообще, что инерционное запаздывание в обратной связи (в отличие от такового в прямой цепи) целесообразно использовать для улучшения качества переходных процессов, получая эффект, аналогичный введению производной в прямой цепи.

Общим свойством является также и то, что жесткие обратные связи апшупируют интегрирующее свойство звена (т. е. анципируют астатизм системы, если в ней нет интегрирования в другом месте цепи звеньев), а гибкие обратные связи сохраняют астатизм.

Могут применяться и другие типы корректирующих обратных связей с более сложными передаточными функциями. Рассмотрим, как можно обеспечить условие сохранения более высокого порядка астатизма при охвате звена обратной связью. Пусть звено

$$W_0(s) = \frac{k}{s^v} W'_0(s)$$

охватывается гибкой обратной связью

$$W_{oc}(s) = k_{oc}s^m W'_{oc}(s).$$

Тогда

$$W(s) = \frac{kW'_0(s)}{s^\nu + s^\mu k k_{oc} W'_0(s)}. \quad (6.11)$$

Очевидно, что для сохранения ν -го порядка астатизма необходимо иметь в обратной связи $\mu \geq \nu$. Если же это невозможно технически и получается $\mu < \nu$, то потерянную часть порядка астатизма можно компенсировать добавлением последовательных корректирующих устройств, например, изодромного типа.

§ 6.3. Корректирующие устройства по внешнему воздействию.

Инвариантность

Основной принцип автоматического управления и регулирования состоит в формировании управляющего сигнала по величине ошибки ε (с использованием интегралов и производных от ε). Если же вводится корректирующее устройство по внешнему воздействию, то получается *комбинированное регулирование* — по ошибке и по внешнему воздействию (тоже с использованием соответствующих интегралов и производных).

Путем введения коррекций по внешнему воздействию удастся теоретически при определенных условиях сводить величину установившейся ошибки к нулю при любой форме внешнего воздействия. Это свойство называется *инвариантностью системы* по отношению к внешнему воздействию.

Внешние воздействия, как уже отмечалось, делятся на задающие, сигнал которых система должна воспроизводить, и возмущающие, действие которых нужно нейтрализовать.

Корректирующие устройства по задающему воздействию. Здесь наряду с сигналом ошибки вводится во внутреннюю цепь системы еще сигнал задающего воздействия $g(t)$ через некоторую передаточную функцию $W_K(s)$ (рис. 6.12). Тогда выходная величина (в изображении по Лапласу) выразится в виде

$$X(s) = \frac{W_0(s)}{1 + W_0(s)} [1 + W_K(s)] G(s),$$

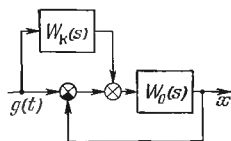


Рис. 6.12

г. е. эквивалентная передаточная функция замкнутой системы для регулируемой величины будет равна

$$\Phi_0(s) = \frac{W_0(s)}{1 + W_0(s)} [1 + W_K(s)],$$

а для ошибки —

$$\Phi_{\text{еэ}}(s) = 1 - \Phi_0(s) = \frac{1 - W_K(s) W_0(s)}{1 + W_0(s)}. \quad (6.12)$$

Установившаяся ошибка будет равна нулю при любой форме задающего воздействия в том случае, если

$$W_K(s) = \frac{1}{W_0(s)}.$$

Обычно этому условию инвариантности удовлетворить полностью нельзя, но можно подобрать приближенное равенство для определенной области частот (практически пропускаемых системой). Такая неполная инвариантность системы весьма существенно уменьшает ошибку в системе регулирования.

Возможны и другие варианты коррекции по задающему воздействию.

Корректирующее устройство по возмущению. Пусть задана схема системы (рис. 6.13, а). Введем корректирующее устройство $W_K(s)$, входом которого является возмущающее воздействие $f(t)$ (рис. 6.13, б). Тогда передаточная функция замкнутой системы для регулируемой величины x по возмущающему воздействию равна

$$\Phi_f(s) = \frac{X}{F} = \frac{W_2(s) [W_3(s) - W_K(s) W_1(s)]}{1 + W_1(s) W_2(s)}. \quad (6.13)$$

Поскольку влияние $f(t)$ надо уничтожить, то условие полной инвариантности принимает вид

$$W_K(s) = \frac{W_3(s)}{W_1(s)}.$$

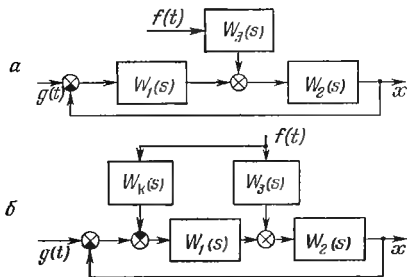


Рис. 6.13

Здесь также можно ограничиваться неполной инвариантностью, если точное удовлетворение условию вызывает технические трудности.

Особая трудность заключается в том, что возмущающие воздействия $f(t)$, в отличие от задающих $g(t)$, далеко не всегда можно подать на вход $W_k(s)$. Действительно, для этого нужно уметь измерять $f(t)$, что не всегда возможно (как например, порывы ветра, действующие на самолет при автоматическом регулировании курса). Существуют косвенные методы измерения $f(t)$, которые широко используются на практике.

Введение корректирующих устройств по внешним воздействиям является важным методом повышения точности систем автоматического регулирования и управления. Этот метод обладает следующей положительной особенностью. Как видно из написанных выше передаточных функций, знаменатель их не изменяется при введении коррекции. Поэтому, учитывая малость числителя, можно сказать, что характеристическое уравнение замкнутой системы при введении такой коррекции практически остается неизменным. Следовательно, этот способ коррекции, существенно повышая точность системы, почти не влияет на качество переходного процесса, в то время как все предыдущие методы повышения точности всегда были связаны с ухудшением качества переходного процесса, если не принимались дополнительные меры.

В заключение остановимся еще на использовании *неединичной главной обратной связи*, которую также можно применять в качестве корректирующего средства. Введем в главную обратную связь, которая обычно равна единице, устройство с передаточной функцией $W_k(s)$ (рис. 6.14). В этом случае на входе системы задающее воздействие $g(t)$ сравнивается не непосредственно с выходной величиной x , как обычно, а с некоторой величиной z , причем

$$Z(s) = W_k(s)X(s).$$

Тогда получаем

$$X(s) = \frac{W_0(s)}{1 + W_k(s)W_0(s)} G(s). \quad (6.14)$$

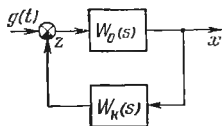


Рис. 6.14

Для полной инвариантности системы требуется $X = G$, т. е.

$$W_{\kappa}(s) = 1 - \frac{1}{W_0(s)}. \quad (6.15)$$

Из этого выражения видно, насколько передаточная функция главной обратной связи должна отличаться от «обычной» единицы, чтобы система стала инвариантной, т. е. воспроизводила без установившейся ошибки любое задающее воздействие. Это условие можно выполнять приближенно. Однако при таком способе, как видно из передаточной функции замкнутой системы, существенно меняется ее характеристическое уравнение. Поэтому одновременно нужно следить, чтобы получалось желаемое качество переходного процесса.

Заметим, что в равновесном состоянии ($s = 0$) из (6.15) в системе без астатизма имеем

$$k_{\kappa} = 1 - \frac{1}{k_0}. \quad (6.16)$$

Следовательно, если ввести в главную обратную связь системы коэффициент усиления k_{κ} согласно формуле (6.16), то система превратится в астатическую ($X = G$) без введения интегрирующего звена.

§ 6.4. Частотный метод синтеза корректирующих устройств

Наиболее распространен частотный метод синтеза корректирующих устройств с помощью логарифмических частотных характеристик. Он проводится следующим образом. Строится желаемая логарифмическая амплитудная частотная характеристика, исходя из требуемой точности системы и требуемого качества переходного процесса. Эта желаемая характеристика сравнивается с той, которую данная система имеет без коррекции. Определяется передаточная функция корректирующего устройства так, чтобы при его включении в систему, в последней получилась бы желаемая форма логарифмической амплитудной характеристики. Затем строится фазовая частотная характеристика и оценивается получающаяся при этом величина запаса устойчивости системы и другие качественные показатели.

Рассмотрим формулирование желаемой логарифмической амплитудной частотной характеристики, исходя из заданных требований к системе по точности и качеству переходного процесса.

Требования точности системы. Они формулируются по-разному.

1. Пусть даны «рабочие» частота ω_p и амплитуда a_p , т. е. основные значения частоты и амплитуды задающего воздействия $g(t)$, которые будут иметь место при работе данной системы; задана также допустимая ошибка $A_* = \varepsilon_{\text{доп}}$ (амплитуда ошибки).

Для области низких частот, где $|W(j\omega_p)| \gg 1$ можно записать

$$|\Phi_e(j\omega_p)| = \frac{1}{|1 + W(j\omega_p)|} \approx \frac{1}{|W(j\omega_p)|}.$$

Следовательно, аналогично формуле (3.24) здесь можно записать

$$A_* \approx \frac{a_p}{|W(j\omega_p)|}.$$

Отсюда желаемое значение

$$|W(j\omega_p)| \geq \frac{a_p}{\varepsilon_{\text{доп}}}. \quad (6.17)$$

2. Пусть даны требуемые характеристики задающего воздействия: $\dot{g}_{\text{max}}$ и $\ddot{g}_{\text{max}}$, а также $\varepsilon_{\text{доп}}$.

Для использования частотных характеристик полагаем

$$g(t) = a_p \sin \omega_p t,$$

где индексом p обозначены «рабочие» амплитуды и частота, при которых будут иметь место заданные скорость $\dot{g}_{\text{max}}$ и ускорение $\ddot{g}_{\text{max}}$.

Тогда, пользуясь формулами (3.23), вычисляем

$$\omega_p = \frac{\ddot{g}_{\text{max}}}{\dot{g}_{\text{max}}}, \quad a_p = \frac{\dot{g}_{\text{max}}^2}{\ddot{g}_{\text{max}}}. \quad (6.18)$$

Заметим, что если $g(t)$ является угловой величиной, то обычно пользуются следующими обозначениями:

$$\bar{g} = \omega, \quad \ddot{g} = \dot{\omega}.$$

Тогда вычисляются

$$\omega_p = \frac{\dot{\omega}_{\max}}{\omega_{\max}}, \quad a_p = \frac{\omega_{\max}^2}{\dot{\omega}_{\max}}, \quad (6.19)$$

и желаемое значение $|W(j\omega_p)|$ — по формуле (6.17).

3. Пусть в астатической системе требуется обеспечить слежение за сигналом $g = \dot{g}_{\max} t$.

Имеем выражения

$$W(s) = \frac{KN(s)}{sL(s)}, \quad \Phi_\varepsilon(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{sL(s)}{sL(s) + KN(s)}.$$

Коэффициенты ошибок

$$c_0 = \Phi_0(0) = 0, \quad c_1 = \left. \frac{d\Phi_\varepsilon}{ds} \right|_{s=0} = \frac{1}{K}.$$

Установившаяся ошибка представляется в виде

$$\varepsilon_{yc}(t) = c_0 g(t) + c_1 \dot{g}(t) = \frac{\dot{g}_{\max}}{K}$$

или в других обозначениях

$$\varepsilon_{yc} = \frac{\omega_{\max}}{K}.$$

Отсюда находим желаемое значение

$$K \geq \frac{\omega_{\max}}{\varepsilon_{\text{доп}}} = \frac{\dot{g}_{\max}}{\varepsilon_{\text{доп}}}. \quad (6.20)$$

По этим данным, отражающим требования точности системы, строим низкочастотную часть желаемой логарифмической амплитудной частотной характеристики, как показано на рис. 6.15. Начальный наклон характеристики -20 дБ/дек (астатизм 1-го порядка). Точка излома и дальнейший наклон пока еще не определены.

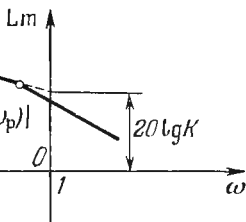


Рис. 6.15

Требования качества переходного процесса. Пусть заданы допустимое перерегулирование σ и время затухания переходного процесса t_n .

Воспользуемся графиком рис. 6.16, взятым из § 5.2. По этому графику, отложив заданную величину σ (на-

пример, 20 %), определяем величину t_n (как показано стрелками на рис. 6.16), например

$$t_n = \frac{2,8\pi}{\omega_c}.$$

Но поскольку желаемое значение t_n нам задано, то можно вычислить необходимую частоту среза

$$\omega_c = \frac{2,8\pi}{t_n}.$$

Наносим найденное значение ω_c на график искомой желаемой ЛАХ (рис. 6.17) и проводим через точку ω_c прямую с наклоном -20 дБ/дек. Это рекомендуется (см. § 5.2) для обеспечения хорошего качества переходного процесса.

Затем из предыдущего расчета берем низкочастотную часть характеристики и указанные части характеристики сопрягаем наклонной прямой с наклоном -40 или -60 дБ/дек (рис. 6.17), как удобнее. Высокочастотная часть заметной роли не играет. Поэтому ее берем такой, какая в данной системе имеется. Проверяем наличие необходимого запаса устойчивости по амплитуде ΔL_m и по фазе $\Delta \varphi$ (рис. 6.17).

Рассмотрим сначала *синтез последовательного корректирующего устройства*, а затем параллельного.

Задапа передаточная функция разомкнутой цепи системы без коррекции $W_0(s)$ (рис. 6.18). Соответствующая ей частотная характеристика отличается от желаемой. Введем последовательное корректирующее устройство с искомой передаточной функцией $k_n \Pi(s)$ (рис. 6.18).

Согласно описанной выше методике, строим желаемую логарифмическую амплитудную частотную характеристику (рис. 6.17). Пусть коэффициент усиления желаемой системы $K_{ж}$ отличается от имеющегося K_0 . Тогда нужно поднять характеристику $W_0(j\omega)$ (рис. 6.19) так, чтобы на ней получился желаемый коэффициент усиления.

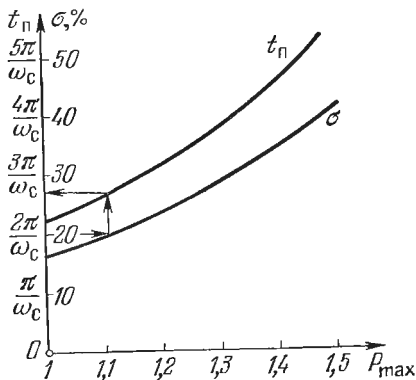


Рис. 6.16

ния. Получаем новую характеристику

$$W'_0(j\omega) = \frac{K_{\text{ж}}}{K_0} W_0(j\omega).$$

Расстояние между W'_0 и W_0 по вертикали в логарифмическом масштабе и дает нам искомую величину

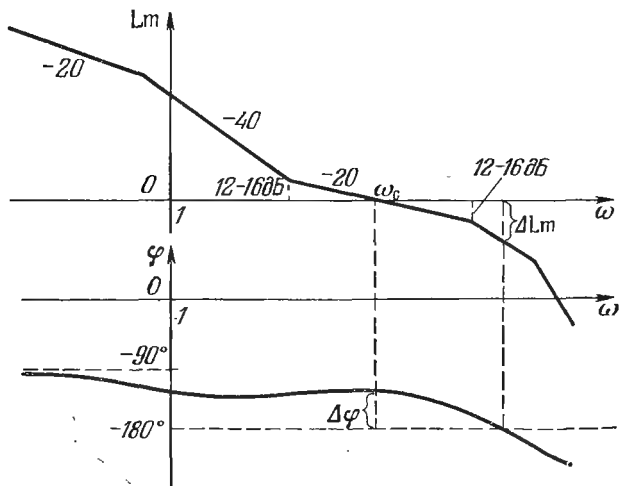


Рис. 6.17

$20 \lg k_{\text{п}}$, т. е. искомый коэффициент усиления корректирующего устройства

$$k_{\text{п}} = \frac{K_{\text{ж}}}{K_0}.$$

Теперь надо найти передаточную функцию корректирующего устройства $\Pi(s)$. Для этого совмещаем на один

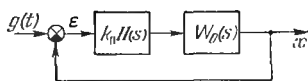


Рис. 6.18

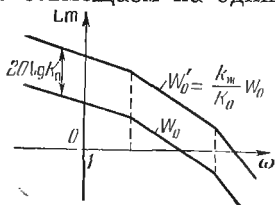


Рис. 6.19

график логарифмические амплитудные частотные характеристики для $W_{\text{ж}}$ и W'_0 . Они отличаются на участке от точки $1/T_1$ до точки $1/T_4$ (рис. 6.20).

Поскольку требуется

$$W(s) = k_{\pi} \Pi(s) W_0(s) = W_{\text{ж}}(s),$$

то можно записать (после подстановки $s = j\omega$) следующее:

$$\Pi(j\omega) = \frac{W_{\text{ж}}(j\omega)}{k_{\pi} W_0(j\omega)}$$

или

$$\Pi(j\omega) = \frac{W_{\text{ж}}(j\omega)}{W'_0(j\omega)} \quad (6.21)$$

откуда

$$20 \lg |\Pi(j\omega)| = 20 \lg |W_{\text{ж}}(j\omega)| - 20 \lg |W'_0(j\omega)|.$$

Следовательно, чтобы найти характеристику $L_m(\omega)$ для $\Pi(s)$, нужно вычесть характеристику $L_m(\omega)$ для

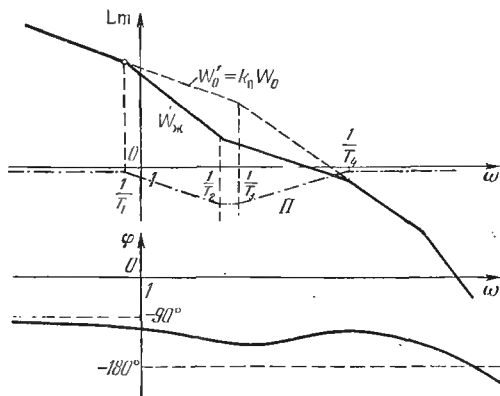


Рис. 6.20

W'_0 из $W_{\text{ж}}$. Результат вычитания показан штрихпунктирной линией на рис. 6.20. Отсюда очевидна искомая передаточная функция последовательного корректирующего устройства

$$\Pi(s) = \frac{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_4 s + 1)}.$$

В заключение нужно построить фазовую характеристику $\varphi(\omega)$ для $W_{\text{ж}}$ и оценить запасы устойчивости (рис. 6.20).

По найденной передаточной функции можно составить электрическую схему корректирующего устройства (см., например, [45]).

Перейдем к синтезу параллельного корректирующего устройства в виде дополнительной обратной связи.

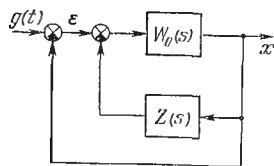


Рис. 6.21

Задана передаточная функция разомкнутой цепи $W_0(s)$. Требуется ввести корректирующую обратную связь $Z(s)$ так, чтобы система в целом (рис. 6.21) обладала желаемой частотной характеристикой.

Передаточная функция разомкнутой цепи с коррекцией равна

$$W_{\text{ж}}(s) = \frac{W_0(s)}{1 + Z(s)W_0(s)}. \quad (6.22)$$

Следовательно,

$$20 \lg |W_{\text{ж}}(j\omega)| = 20 \lg |W_0(j\omega)| - 20 \lg |1 + Z(j\omega)W_0(j\omega)|.$$

Чтобы избавиться от суммы под знаком логарифма, запишем приближенно

$$\begin{aligned} 20 \lg |W_{\text{ж}}(j\omega)| &\approx \\ &\approx \begin{cases} 20 \lg |W_0(j\omega)| & \text{при } |Z(j\omega)W_0(j\omega)| \ll 1, \\ 20 \lg \left| \frac{1}{Z(j\omega)} \right| & \text{при } |Z(j\omega)W_0(j\omega)| \gg 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Построим заданную логарифмическую характеристику W_0 с желаемым коэффициентом усиления и желаемую характеристику $W_{\text{ж}}$ (рис. 6.22).

В качестве искомой характеристики $1/Z$ примем характеристику, обозначенную на рис. 6.22 точечным пунктиром и совпадающую в средней части с $W_{\text{ж}}$. Вычтем $1/Z$ из характеристики W_0 . Получим

$$20 \lg |W_0(j\omega)| - 20 \lg \left| \frac{1}{Z(j\omega)} \right| = 20 \lg |Z(j\omega)W_0(j\omega)|.$$

Этот результат показан на рис. 6.22 штрихпунктирной линией. Из графика видно, что на участке CD характеристика $|ZW_0| > 1$, а до точки C и после точки D характеристика $|ZW_0| < 1$, так как ось абсцисс соответствует значению амплитуды, равному 1 ($20 \lg A = 0$).

Следовательно, при принятом очертании искомой характеристики $1/Z$ удовлетворяются написанные выше приближенные равенства (6.23).

Таким образом, найдено параллельное корректирующее устройство в виде обратной связи, которое создает

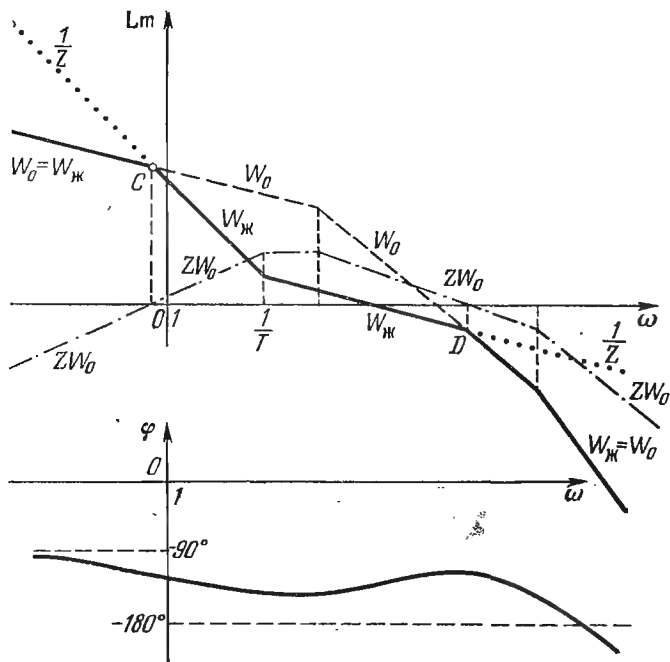


Рис. 6.22

для системы в целом близкую к желаемой частотную характеристику. Согласно рис. 6.22 логарифмическая характеристика Z получит вид, представленный на рис. 6.23, что соответствует следующей передаточной функции искомой корректирующей обратной связи:

$$Z_c(s) = \frac{ks^2}{Ts + 1}.$$

Это есть иерционная гибкая обратная связь с двойным дифференцированием (т. е. обратная связь по угловому ускорению исполнительного привода следящей системы).

В заключение, ввиду использования здесь приближенных равенств, необходимо уточнить получившуюся фактически характеристику

$$W(j\omega) = \frac{W_0(j\omega)}{1 + Z(j\omega)W_0(j\omega)}$$

оценить ее близость к желаемой, а затем изобразить фазовую характеристику $\varphi(\omega)$ (рис. 6.22) и оценить запасы устойчивости и качество процессов, которые будут иметь место фактически.

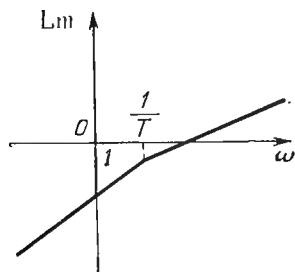


Рис. 6.23

Поскольку данное построение требует соблюдения «минимально-фазовости» системы, то надо проверить также устойчивость внутреннего контура системы (рис. 6.21) с передаточной функцией

$$W_{\text{вн}}(s) = Z(s)W_0(s).$$

Амплитудная частотная характеристика для него имеется на рис. 6.22. Нужно только построить фазовую частотную характеристику $\varphi_{\text{вн}}(\omega)$ и убедиться в соблюдении частотного критерия устойчивости.

Существует развитие этого метода применительно к синтезу *совместно вводимых корректирующих устройств* (последовательного и параллельного). Разработаны также и иные варианты частотных методов синтеза.

§ 6.5. Метод корневого годографа

О качестве процесса регулирования можно судить по расположению корней характеристического уравнения (т. е. полюсов передаточной функции замкнутой системы), учитывая также еще и операторный многочлен в правой части дифференциального уравнения (т. е. нули передаточной функции замкнутой системы). Вкратце об этом шла речь выше (§ 5.3).

Корневым годографом называется совокупность траекторий перемещения всех корней характеристического уравнения замкнутой системы при изменении какого-либо параметра этой системы (например, общего коэффициента усиления K разомкнутой цепи данной системы).

Пусть задана передаточная функция разомкнутой цепи системы автоматического регулирования. Запишем ее в виде

$$KW(s) = \frac{KN(s)}{L(s)} \quad (6.24)$$

где K — общий коэффициент усиления разомкнутой цепи, а многочлены $N(s)$ и $L(s)$ имеют единичные коэффициенты при младших членах.

Главная передаточная функция замкнутой системы для регулируемой величины по задающему воздействию $g(s)$, как известно, имеет вид

$$\Phi(s) = \frac{KW(s)}{1 + KW(s)} = \frac{KN(s)}{L(s) + KN(s)}. \quad (6.25)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы запишется соответственно в форме

$$D(s) = L(s) + KN(s) = 0.$$

Его можно записать и иначе:

$$1 + KW(s) = 0,$$

или же

$$KW(s) = -1. \quad (6.26)$$

Эта форма записи характеристического уравнения замкнутой системы и используется в дальнейшем. Выражение (6.26) является *основным уравнением* метода корневого годографа.

Обозначим корни характеристического уравнения замкнутой системы:

$$s_1, s_2, \dots, s_n,$$

полюса передаточной функции разомкнутой цепи [корни $L(s)$]:

$$P_1, P_2, \dots, P_n,$$

нули передаточной функции разомкнутой цепи [корни $N(s)$]:

$$N_1, N_2, \dots, N_m \quad (m < n).$$

Очевидно, величины P_i и N_g не зависят от K .

Задача состоит в том, чтобы, зная расположение нулей $N_1, \dots, N_m$ и полюсов $P_1, \dots, P_n$ передаточной функции разомкнутой цепи $KW(s)$, найти корни характеристического уравнения $s_1, \dots, s_n$ как функции параметра

К. Графически это и будет корневой годограф данной системы.

Корни характеристического уравнения являются полюсами передаточной функции замкнутой системы. Что же касается нулей этой функции, то согласно (6.25) нули замкнутой системы совпадают с заданными нулями разомкнутой цепи этой системы (6.24).

Преобразуем основное уравнение метода корневого годографа. Уравнение (6.26) распадается на два: уравнение модулей

$$K|W(s)| = 1 \quad (6.27)$$

и уравнение фаз

$$\arg KW(s) = \pm(2\nu - 1)\pi \quad (\nu = 1, 2, \dots). \quad (6.28)$$

Можно написать

$$KW(s) = KC \frac{(s - N_1)(s - N_2) \dots (s - N_m)}{(s - P_1)(s - P_2) \dots (s - P_n)}, \quad (6.29)$$

где C — отношение коэффициентов при старших членах многочленов $N(s)$ и $L(s)$.

Подставим вместо s один из искомых корней характеристического уравнения s_k . На плоскости $s = \sigma + j\omega$ (рис. 6.24) этот корень изобразится вектором s_k . Построим также векторы P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и N_q ($q = 1, 2, \dots, m$) полюсов и нулей функции $KW(s)$. Полюса P_i будем обозначать крестиками, нули N_q — кружочками, а корни s_k — треугольниками. На рис. 6.24 показаны также векторы величин $s_k - N_q$ и $s_k - P_i$. Обозначим их аргументы соответственно через ϑ_q^0 и ϑ_i , а модули: l_q^0 и l_i .

Рис. 6.24

Тогда уравнение фаз (6.28) с учетом выражения (6.29) можно переписать в виде

$$\sum_{q=1}^m \vartheta_q^0 - \sum_{i=1}^n \vartheta_i = \pm(2\nu - 1)\pi, \quad (6.30)$$

а уравнение модулей (6.27) с учетом (6.29) — в виде

$$K = \frac{1}{C} \frac{l_1 l_2 \dots l_n}{l_1^0 l_2^0 \dots l_m^0}. \quad (6.31)$$

Уравнение фаз (6.30) не зависит от K . Поэтому путь решения задачи может быть такой. Сначала следует подобрать на плоскости s такое положение s_k , которое бы удовлетворяло уравнению фаз (6.30) при всех заданных P_i и N_q . Потом по уравнению модулей (6.31) пужно подсчитать, какой величине параметра K это соответствует. Таким путем постепенно можно построить весь корневой годограф.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Дапо

$$KW(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}.$$

Согласно (6.29) можно написать

$$KW(s) = KC \frac{(s - N_1)}{(s - P_1)(s - P_2)(s - P_3)(s - P_4)},$$

где

$$C = \frac{\tau}{T_1 T_2 T_3}, \quad N_1 = -\frac{1}{\tau},$$

$$P_1 = 0, \quad P_2 = -\frac{1}{T_1}, \quad P_3 = -\frac{1}{T_2}, \quad P_4 = -\frac{1}{T_3}.$$

Изобразим данные нули и полюса (рис. 6.25). Заметим, что согласно (6.25) и (6.24) при $K=0$ все корни s_k совпадают с полюсами P_i . Далее же легко проверить, что уравнение фаз

$$\vartheta_1^0 - (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4) = \pm (2\nu - 1) 180^\circ$$

будет удовлетворяться для корня s_1 , если он находится на оси между точками P_1 и N_1 ; для корня s_4 — если он лежит на оси левее точки P_4 . С увеличением K эти корни движутся как показано на рис. 6.25 стрелками.

Что же касается корней s_2 и s_3 , то уравнение фаз удовлетворяется, когда они оба находятся на оси между точками P_2 и P_3 . С увеличением K они движутся навстречу друг другу. При некотором значении K они сливаются, а затем с увеличением K становятся комплексными (сопряженными) и движутся по некоторым кри-

вым, точки которых определяются так, чтобы удовлетворялось уравнение фаз. Кривые эти симметричны, поскольку корни сопряженные (рис. 6.25).

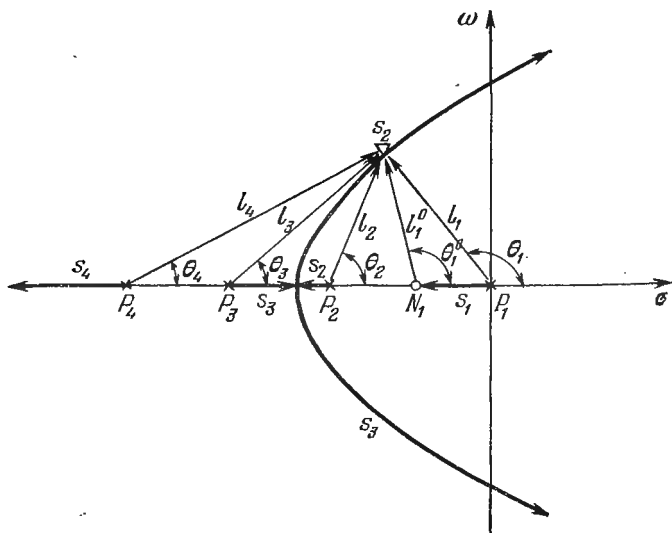


Рис. 6.25

Величина K , отвечающая каждому конкретному положению корней, находится по уравнению модулей

$$K = \frac{T_1 T_2 T_3}{\tau} \frac{l_1 l_2 l_3 l_4}{l_1^0}.$$

Итак, траектории корней строятся только по уравнению фаз, а уравнение модулей используется затем для определения соответствующих значений K .

В указанном виде процесс построения будет довольно громоздким. Однако он очень упрощается при использовании общих свойств корневого годографа изложенных, например в [27].

Пример 2. На основе аналогичных рассуждений можем построить корневой годограф для системы с передаточной функцией разомкнутой цепи

$$KW(s) = \frac{K}{s(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)}$$

в виде, изображенном на рис. 6.26 при $\xi < 1$ и на рис. 6.27 при $\xi > 1$.

Проиллюстрируем на примерах некоторые элементы синтеза корректирующих устройств с помощью метода корневого годографа.

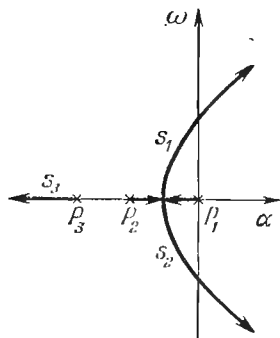


Рис. 6.26

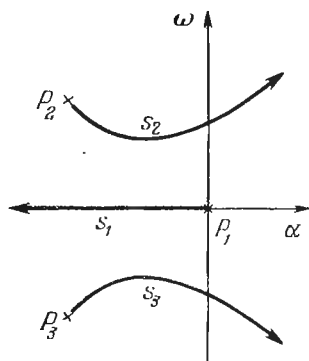


Рис. 6.27

Для системы, схема которой изображена на рис. 6.28 задана передаточная функция

$$KW_0(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}. \quad (6.32)$$

Требуется выбрать коэффициент усиления K и параметры последовательного корректирующего устройства

$$\Pi(s) = \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1}. \quad (6.33)$$

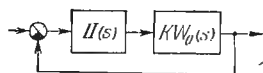


Рис. 6.28

Рассмотрим два варианта: а) $\beta = 0,1$ — устройство близко к дифференцирующему; б) $\beta = 10$ — устройство близко к интегрирующему.

Изобразим сначала корневой годограф системы без коррекции. В передаточной функции (6.32) имеем полюса:

$$P_1 = 0, \quad P_2 = -\frac{1}{T_1}, \quad P_3 = -\frac{1}{T_2}.$$

Корневой годограф показан на рис. 6.29.

В случае с коррекцией (6.33) получаем

$$KW(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)(\beta \tau s + 1)},$$

где добавляется еще один полюс и появляется один нуль:

$$P_4 = -\frac{1}{\beta\tau}, \quad N_1 = -\frac{1}{\tau}. \quad (6.34)$$

В первом случае ($\beta = 0, 1$) выберем τ так, чтобы нуль N_1 расположился вблизи доминирующих корней (рис. 6.30). Полюс P_4 расположится на десятикратном расстоянии влево, т. е. будет несущественным.

Получаем новый корневой годограф (рис. 6.30). Видно, что «опасные» комплексные корни значительно отодвинуты от мнимой оси, а влияние нового вещественного

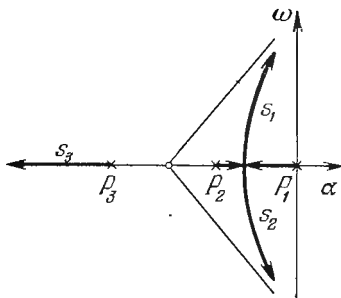


Рис. 6.29

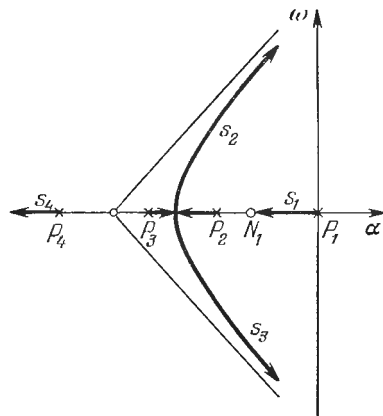


Рис. 6.30

корня s_1 уменьшается наличием близко расположенного нуля N_1 .

Во втором случае ($\beta = 10$) новый полюс P_4 согласно (6.34) будет в десять раз ближе к началу координат, чем нуль N_1 . Следовательно, P_4 близок к нулю, а система становится близкой к дважды астатической, что увеличивает ее точность. Корневой годограф принимает вид, изображенный на рис. 6.31.

Рассмотрим теперь включение интегро-дифференцирующего устройства с передаточной функцией

$$P(s) = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{(\beta_1 \tau_1 s + 1)(\beta_2 \tau_2 s + 1)}$$

при значениях $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 0, 1$. В этом случае имеем два

добавочных полюсов и два нуля:

$$P_4 = -\frac{1}{\beta_1 \tau_1}, \quad P_5 = -\frac{1}{\beta_2 \tau_2}, \quad N_1 = -\frac{1}{\tau_1}, \quad N_2 = -\frac{1}{\tau_2}.$$

Первый из них очень мал (почти нулевой), а второй расположен далеко влево (рис. 6.32). Корни s_1 и s_2 , имевшие неудовлетворительное расположение ранее (рис. 6.31), теперь (рис. 6.32), выходя от начала координат, вливаются в нули N_1 и N_2 . Эти корни s_1 и s_2 ближе других к

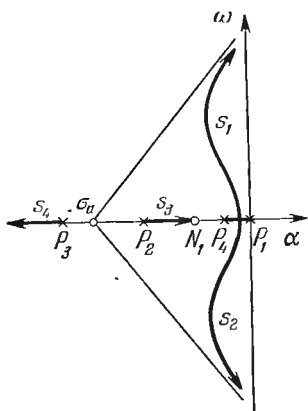


Рис. 6.31

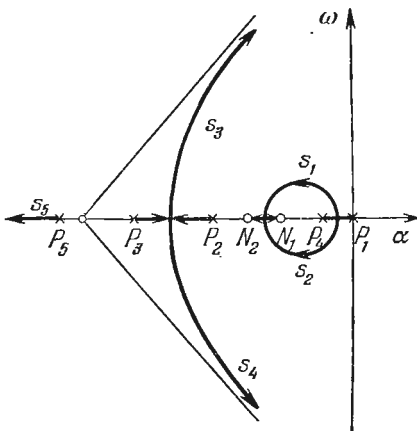


Рис. 6.32

мнимой оси. Но, во-первых, они уже не могут вызвать неустойчивости и, во-вторых, их влияние нейтрализуется близко расположенными нулями. Корни же s_3 и s_4 , стремящиеся с увеличением K вправо, располагаются достаточно далеко от мнимой оси.

В книге [27] приведены другие примеры коррекции (неединичная обратная связь и регулирование по внешнему воздействию).

Другие методы синтеза рассматриваются ниже в главах 7 и 8.

МЕТОД ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

§ 7.1. Уравнения системы и ее коррекция в пространстве состояний

При исследовании динамических свойств систем автоматического управления классическими методами после составления дифференциальных уравнений для отдельных элементов системы обычно переходят к передаточным функциям этих элементов. Далее составляют общую структурную схему для всей системы, в которой отдельные элементы представляются блоками с соответствующими передаточными функциями. Затем определяется передаточная функция замкнутой системы, характеризующая связь между изображениями по Лапласу входной и выходной величины.

Однако поведение системы во времени можно характеризовать не только выходной величиной системы, но и промежуточными переменными в цепи системы, число которых равно порядку системы n . Таким образом, получается n -мерный вектор состояния, множество возможных положений которого образует векторное пространство, называемое *пространством состояний системы*.

Будем рассматривать общий случай обыкновенных линейных систем управления (рис. 7.1), описываемых системой дифференциальных уравнений в нормальной форме в векторно-матричной записи

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{g}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x},\end{aligned}\tag{7.1}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор состояния системы, $\mathbf{y}$ — вектор выходных величин, $\mathbf{g}$ — вектор внешних воздействий (задающих и

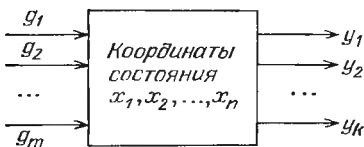


Рис. 7.1

возмущающих), а именно:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}.$$

Через A, B, C обозначены:

собственная параметрическая матрица системы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

входная матрица системы

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix},$$

выходная матрица системы

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \dots & c_{kn} \end{bmatrix}.$$

Процессы в системе в свободном движении (без внешних воздействий) согласно (7.1) описываются векторно-матричным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (7.2)$$

с характеристическим уравнением

$$D(\lambda) = |A - \lambda E| = 0, \quad (7.3)$$

или в развернутом виде системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ . &\quad . &&. &&. &&. &&. &&. \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{7.4}$$

с характеристическим уравнением

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (7.5)$$

Эти уравнения дают возможность изучить переходные процессы в системе путем решения их численными методами с использованием ЭВМ (при определенных начальных условиях).

Рассмотрим вывод уравнений состояния для замкнутой системы регулирования. В качестве примера возьмем электромеханическую следящую систему (рис. 7.2).

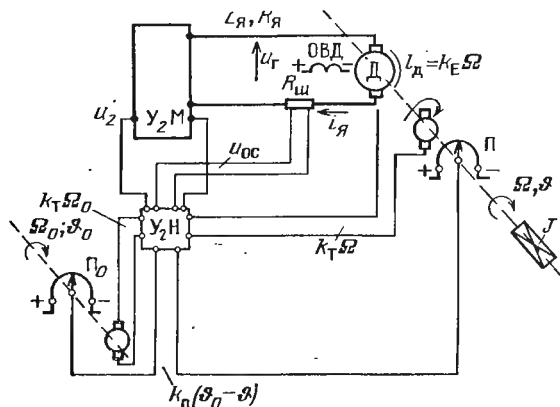


Рис. 7.2

В этой системе введены обратные связи по углу поворота, скорости вращения и току в цепи якоря двигателя. Обозначения переменных ясны из чертежа.

Для электродвигателя постоянного тока имеем: уравнение электрической цепи

$$L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + R_{\text{я}} i_{\text{я}} + e_{\text{д}} = u, \quad (7.6)$$

уравнение механической цепи

$$J \frac{d\Omega}{dt} + M_{\text{с}} = M_{\text{д}}, \quad (7.7)$$

где момент сопротивления $M_{\text{с}} = r\Omega$, момент двигателя $M_{\text{д}} = k_{\text{м}} i_{\text{я}}$, э. д. с. двигателя $e_{\text{д}} = k_{\text{е}} \Omega$. Через r , $k_{\text{м}}$ и $k_{\text{е}}$ обозначены соответствующие коэффициенты. Преобразуя (7.6) и (7.7), получим уравнения двигателя в виде

$$\frac{di_{\text{я}}}{dt} = -\frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} i_{\text{я}} - \frac{k_{\text{е}}}{L_{\text{я}}} \Omega + \frac{1}{L_{\text{я}}} u, \quad (7.8)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{k_{\text{м}}}{J} i_{\text{я}} - \frac{r}{J} \Omega, \quad \frac{r}{J} = \frac{1}{T_{\text{м}}}. \quad (7.9)$$

Для входной цепи усилителя напряжения $Y_{2\text{H}}$ имеем

$$u_1 = k_{\text{н}} (\vartheta_0 - \vartheta) + k_{\text{т}} (\Omega_0 - \Omega),$$

где ϑ_0, Ω_0 — внешние входные величины; ϑ, Ω — выходные величины системы.

Для входной цепи усилителя мощности Y_2M запишем

$$u_2 = k_1 u_1 - k_{oc} u_{oc},$$

где $u_{oc} = R_{ш} i_{я}$.

Выходное напряжение усилителя мощности с учетом предыдущего будет равно

$$u_r = k_{ym} u_2, \quad \text{т. е.} \quad u_r = k_{ym} k_1 u_1 - k_{ym} k_{oc} R_{ш} i_{я}.$$

После подстановки получим

$$u_r = k_{ym} k_1 [k_{п} (\vartheta_0 - \vartheta) + k_{т} (\Omega_0 - \Omega)] - k_{ym} k_{oc} R_{ш} i_{я}. \quad (7.10)$$

Совместно (7.8) и (7.10) дают уравнение

$$\begin{aligned} \frac{di_{я}}{dt} = \frac{1}{i_{я}} \{ & k_1 k_{ym} [k_{п} (\vartheta_0 - \vartheta) + k_{т} (\Omega_0 - \Omega)] - \\ & - k_{oc} k_{ym} R_{ш} i_{я} - \frac{R_{я}}{L_{я}} i_{я} - \frac{k_E}{L_{я}} \Omega, \end{aligned}$$

которое может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \frac{di_{я}}{dt} = - \left(\frac{R_{я}}{L_{я}} + k_{oc} k_{ym} \frac{R_{ш}}{L_{я}} \right) i_{я} - \left(\frac{k_1 k_{ym} k_{т}}{L_{я}} + \frac{k_E}{L_{я}} \right) \Omega - \\ - \frac{k_1 k_{ym} k_{п}}{L_{я}} \vartheta + \frac{k_1 k_{ym} k_{т}}{L_{я}} \Omega_0 + \frac{k_1 k_{ym} k_{п}}{L_{я}} \vartheta_0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Скорость вращения

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \Omega. \quad (7.12)$$

Систему из трех уравнений (7.11), (7.9) и (7.12) запишем в векторно-матричной форме:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{я} \\ \Omega \\ \vartheta \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} - \left(\frac{R_{я}}{L_{я}} + \frac{k_{oc} k_{ym} R_{ш}}{L_{я}} \right) & - \left(\frac{k_E}{L_{я}} + \frac{k_1 k_{ym} k_{т}}{L_{я}} \right) & - \frac{k_1 k_{ym} k_{п}}{L_{я}} \\ \frac{k_M}{J} & - \frac{1}{T_M} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{я} \\ \Omega \\ \vartheta \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \frac{k_1 k_{ym} k_{т}}{L_{я}} & \frac{k_1 k_{ym} k_{п}}{L_{я}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ \vartheta_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Введем обозначения $i_{\text{я}} = x_1$; $\Omega = x_2$; $\vartheta = x_3$ — координаты вектора состояний следящей системы, а также обозначим:

$$\begin{aligned} -\frac{k_1 k_{\text{ум}} k_{\text{п}}}{L_{\text{я}}} &= -c_{\text{п}} = a_{13} = b_{12}, \quad \frac{k_{\text{м}}}{J} = a_{21}, \\ -\frac{R_{\text{я}} + k_{\text{ос}} k_{\text{ум}} R_{\text{ш}}}{L_{\text{я}}} &= -\frac{1}{T_{\text{яэ}}} = a_{11}, \quad -\frac{k_{\text{е}} + k_1 k_{\text{ум}} k_{\text{т}}}{L_{\text{я}}} = -c_{\text{е}} = a_{12}, \\ -\frac{1}{T_{\text{м}}} &= a_{22}, \quad \frac{k_1 k_{\text{ум}} k_{\text{т}}}{L_{\text{я}}} = b_{11}, \quad \Omega_0 = g_1, \quad \vartheta_0 = g_2. \end{aligned}$$

В результате получим уравнение состояния следящей системы в стандартной векторно-матричной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{g}, \quad (7.13)$$

где $\mathbf{x}$ — вектор состояния системы, $\mathbf{g}$ — входной вектор, причем

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}.$$

Параметрическая матрица системы $\mathbf{A}$ и входная матрица $\mathbf{B}$ имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Соответствующая структурная схема представлена на

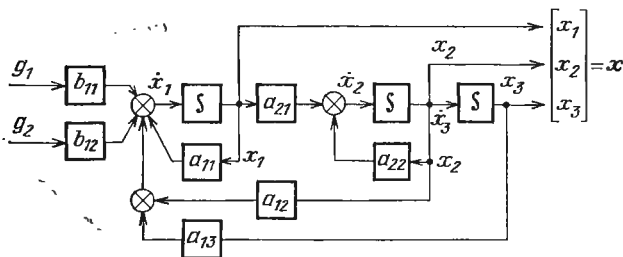


Рис. 7.3

рис. 7.3. Она составлена по уравнениям данной системы

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_{11}g_1 + b_{12}g_2,$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + 0 \cdot x_3,$$

$$\dot{x}_3 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3.$$

Дополним (7.13) выходным уравнением

$$y = Cx.$$

Поскольку в наших обозначениях выходные величины $\Omega = x_2$, $\vartheta = x_3$, то в этом уравнении координатами выходного вектора системы

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

будут $y_1 = 0$, $y_2 = x_2 = \Omega$, $y_3 = x_3 = \vartheta$, а выходная матрица системы

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом можно привести к стандартной векторно-матричной форме (7.1) уравнения состояния любой линеаризованной системы автоматического управления (непрерывной и стационарной).

При расчете систем управления в пространстве состояний падо иметь в виду, что далеко не все координаты состояния систем могут быть технически измеряемыми. Это часто является или чрезвычайно затруднительным, или технически невозможным.

Пусть A^0 обозначает матрицу нескорректированного объекта управления. Положим, что r координат вектора x^0 матрицы A^0 технически измеряемы, а h координат — неизмеряемы. Для коррекции системы так называемым методом «расширения пространства состояний» введем блочную, окаймленную рядами нулей, матрицу

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & A^0 \end{bmatrix}^n. \quad (7.14)$$

Теперь уравнение объекта управления в векторно-матричной форме будет

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_n x + Pu, \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

где u и y — векторы соответственно управления и выхода, P и C — матрицы соответствующих порядков.

Закон управления запишем в таком виде

$$u = (F_\mu + F_\nu)y + Hg,$$

где F_μ и F_ν — матрицы, которые являются функциями параметров последовательных корректирующих устройств (корректирующих фильтров), $\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_{n-r}\}$ и параметров отрицательных обратных связей $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_r\}$, H — входная матрица управления.

Для замкнутой системы получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_n x + P(F_\mu Cx + F_\nu Cx + Hg) = \\ &= (A_n + PF_\mu C + PF_\nu C)x + PHg, \end{aligned}$$

или

$$\dot{x} = Ax + Bg,$$

где

$$A = A_n + PF_\mu C + PF_\nu C = A_n + A_\mu + A_\nu, \quad B = PH,$$

т. е. коррекция фильтрацией определяется матрицей $A_\mu = PF_\mu C$, заполняющей нулевые места блочной матрицы (7.14), т. е.

$$A_\mu = \begin{bmatrix} A'_\mu & A''_\mu \\ \hline A'''_\mu & 0 \end{bmatrix} = [\mu_{ik}]_1^n,$$

а корректирующее влияние обратных связей несет в себе матрица $A_\nu = PF_\nu C$, входящая в основную часть блочной матрицы (7.14), т. е.

$$A_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hline 0 & A'_\nu \end{bmatrix} = [\nu_{ik}]_1^n.$$

Свободное состояние скорректированной системы описывается векторно-матричным уравнением

$$\dot{x} = A(\mu, \nu)x,$$

которому соответствует характеристическое уравнение

$$D(\lambda) = |A(\mu, \nu) - \lambda E| = 0,$$

приводимое к виду

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

где коэффициенты a_i есть функции от параметров объекта и параметров корректирующих цепей:

$$a_i = a_i(\mu, \nu), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, при введении в систему корректирующих фильтров за счет дополнения основных уравнений собственно системы уравнениями цепей коррекции, пространство состояний корректируемой системы расширяется. Порядок системы увеличивается, однако число свободно подбираемых параметров возрастает больше, чем позволяет в ряде случаев осуществить полную коррекцию системы. Для иллюстрации составим, например, уравнения состояния интегро-дифференцирующего корректирующего звена (рис. 7.4 и 7.5). В качестве координат состояния целесообразно выбрать напряжения на конденсаторах, характеризующие накопление количества электричества. Получим

$$\dot{u}_{C1} = \frac{1}{C_1} i_{C1}, \quad \dot{u}_{C2} = \frac{1}{C_2} i_{C2}.$$

Но, так как

$$i_{C1} = i_2 - i_{R1}, \quad i_2 = i_{C2} = i_{R2}, \quad i_{R1} = \frac{u_{C1}}{R_1}, \quad i_2 = \frac{u_2 - u_{C2}}{R_2},$$

то после подстановки и простых преобразований будем

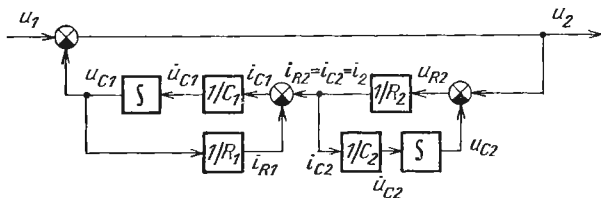


Рис. 7.5

иметь следующие уравнения состояния:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{u}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2}\right) & -\frac{1}{C_1 R_2} \\ -\frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_2 R_2} \\ \frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} u_1.$$

Выходная величина $u_2 = u_1 - u_{C1}$.

Включение последовательно подобного корректирующего звена расширяет пространство состояний на две

координаты, однако число свободных варьируемых параметров C_1, C_2, R_1, R_2 равно четырем.

Для электрических фильтров, используя, как предлагалось выше, в качестве координат состояния напряжения на емкостях и токи в индуктивных элементах, можно получить общие уравнения в форме пространства состояний:

$$\dot{x}_k = A_k x_k + B_k u_k,$$

$$y_k = C_k x_k + P_k u_k,$$

где x_k — n_k -мерный вектор состояния фильтра; u_k и y_k — скалярные входная и выходная координаты; A_k — $(n_k \times n_k)$ -мерная матрица пространства состояний фильтра; B_k — $(n_k \times 1)$ -мерная входная матрица; C_k — $(1 \times n_k)$ -мерная и P_k — выходные матрицы корректирующего фильтра.

Матрицы уравнений состояния наиболее распространенных корректирующих фильтров см. в книге [45].

§ 7.2. Прямой корневой метод синтеза систем управления доминантного типа

Как уже говорилось в § 5.3, о качестве процесса управления можно судить по расположению корней характеристического уравнения (т. е. полюсов передаточной функции замкнутой системы), учитывая также еще и операторный многочлен в правой части дифференциального уравнения (т. е. нули передаточной функции замкнутой системы).

В настоящее время разрабатываются различные корневые методы расчета автоматических систем. Выше (§ 6.5) было дано понятие о методе корневого годографа. Наиболее перспективным из корневых методов сейчас является прямой корневой метод синтеза, называемый *модальным методом синтеза* системы по заданному качеству процесса управления.

Вводится целевая функция, которая является функциональным выражением поставленной цели при синтезе системы. Например, это может быть функциональная зависимость, определяющая длительность переходного процесса, или интегральную квадратичную ошибку, или погрешность по фазе (амплитуде) при гармоническом управляющем сигнале и т. д. Целевой функцией также может быть функциональная зависимость, отражающая сложность системы. Обычно целевую функцию представ-

ляют как ограниченную скалярную действительную непрерывно дифференцируемую функцию $F = F(q_1, \dots, q_k)$ искомых параметров q_i ($i = 1, \dots, k$) передаточной функции замкнутой системы или корректирующих цепей.

При этом общую задачу можно мыслить как выбор вектора параметров $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_k]^T$, минимизирующего или максимизирующего в допустимых пределах значение целевой функции на допустимом множестве Q^d (рис. 7.6)

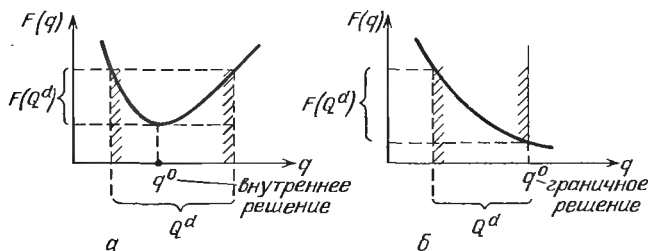


Рис. 7.6

с внутренним решением (рис. 7.6, а) и граничным решением (рис. 7.6, б).

Однако чаще всего при проектировании системы не прибегают к подобной оптимизации, а исходят из удовлетворения заданным требованиям, как это было показано выше в главе 6.

В данном случае положим в основу желаемое расположение полюсов и нулей передаточной функции системы, как функции цели при синтезе системы с допустимыми качественными показателями.

Пусть задана передаточная функция разомкнутой цепи системы автоматического управления. Запишем ее в виде

$$KW(s) = \frac{KN(s)}{L(s)}, \quad (7.15)$$

где K — общий коэффициент усиления разомкнутой цепи, а многочлены $N(s)$ и $L(s)$ имеют единичные коэффициенты при младших членах.

Передаточная функция замкнутой системы для управляемой величины по задающему воздействию $g(t)$, как известно, имеет вид

$$\Phi(s) = \frac{KW(s)}{1 + KW(s)} = \frac{KN(s)}{L(s) + KN(s)}. \quad (7.16)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$D(\lambda) = L(\lambda) + KN(\lambda) = 0. \quad (7.17)$$

Обозначим корни характеристического уравнения замкнутой системы $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, полюса передаточной функции разомкнутой системы $P_1, P_2, \dots, P_n$, нули передаточной функции как замкнутой, так и разомкнутой системы — $N_1, N_2, \dots, N_m$, причем $m < n$. Тогда можем записать

$$\Phi(s) = \frac{C(s - N_1)(s - N_2) \dots (s - N_m)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n)}. \quad (7.18)$$

Задача синтеза состоит в том, чтобы, опираясь на ряд качественных показателей системы, найти соответствующее расположение величин $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ на комплексной плоскости, а затем найти параметры корректирующих цепей, обеспечивающих заданное расположение указанных корней. При этом исходными качественными показателями могут быть, например, вид переходного процесса (апериодический, колебательный), время затухания, колебательность, частота колебаний, интегральная квадратичная ошибка и т. д. Для класса следящих систем существенной дополнительной оценкой качества обычно принимаются ошибки по модулю и фазе при гармоническом задающем воздействии.

Указанные требования на одновременное выполнение различных качественных показателей создаваемой системы приводят к задаче выделения на комплексной плоскости соответствующих областей допустимого расположения полюсов и нулей передаточной функции замкнутой системы.

Покажем решение задачи выделения на комплексной плоскости областей допустимого расположения полюсов функции (7.18) на общем примере многокритериального синтеза следящей системы.

Амплитудно-фазовая характеристика идеальной следящей системы должна иметь единичный модуль и нулевую фазу во всем спектре рабочих частот и существенное ослабление сигнала на высоких частотах, что необходимо для подавления посторонних сигналов и шумов. Однако реализация подобных характеристик реальной следящей системой практически невозможна.

Оправдала себя такая практика проектирования, когда осуществляется возможное приближение передаточной

функции замкнутой следящей системы к так называемой доминантной, т. е. к колебательному звену с малым коэффициентом демпфирования и большой собственной частотой ω_k . Всплеск амплитуды при $\omega = \omega_k$ в случае необходимости может быть скомпенсирован антирезонансным корректирующим звеном на входе замкнутой системы. При сравнительно малых частотах по отношению к ω_k , погрешности по амплитуде и фазе могут оказаться малыми при надлежащем выборе двух доминирующих, т. е. ближайших к мнимой оси слева, комплексно сопряженных полюсов системы и достаточно далекими остальными полюсами, влияние которых оказывается несущественным.

Итак, если согласно (7.18) назначить желаемые значения полюсов желаемой функции $\Phi^*(s)$, т. е. $\lambda_i = \lambda_i^*$ ($i = 1, \dots, n$), то получим

$$\Phi^*(s) = \frac{KN^*(s)}{a_0 \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i^*)}.$$

Соответствующая желаемая АФХ замкнутой системы при $s = j\omega$ будет иметь вид

$$\Phi^*(j\omega) = \frac{KN^*(j\omega)}{a_0 \prod_{i=1}^n (j\omega - \lambda_i^*)}, \quad (7.19)$$

для которой возможно построить желаемые логарифмические амплитудную и фазовую характеристики, состоящие из суммы парциальных частотных характеристик.

Для желаемой пары комплексных корней $\lambda_{i,i+1}^* = -\alpha_i \pm j\omega_i$ парциальная обратная частотная характеристика

$$\begin{aligned} (j\omega + \alpha_i - j\omega_i)(j\omega + \alpha_i + j\omega_i) &= \\ &= \beta_i^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\beta_i^2} + j2 \frac{\omega}{\beta_i} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right) = \frac{1}{T_i^2} (1 - \omega^2 T_i^2 + j2\zeta_i T_i \omega), \end{aligned}$$

где

$$\beta_i^2 = \frac{1}{T_i^2} = \alpha_i^2 + \omega_i^2, \quad \zeta = \frac{\alpha_i}{\beta_i}.$$

Она соответствует последовательно включенному эквива-

лентному колебательному звену

$$W_{\text{эк}}^*(s) = \frac{1/\beta_i^2}{1 + 2\zeta_i T_i s + T_i^2 s^2}.$$

Для желаемого вещественного корня $\lambda_i^* = -\alpha_i$ парциальная обратная частотная характеристика

$$j\omega + \alpha_i = \alpha_i \left(1 + j \frac{\omega}{\alpha_i} \right) = \alpha_i (1 + j\omega T_i),$$

где $\alpha_i = 1/T_i$. Она соответствует последовательно включенному эквивалентному апериодическому звену

$$W_{\text{эА}}^*(s) = \frac{1/\alpha_i}{1 + sT_i}.$$

Таким образом, желаемая АФХ замкнутой астатической следящей системы получает вид

$$\begin{aligned} \Phi^*(j\omega) &= \frac{K}{a_0} \prod_{i=1}^r W_{\text{эк}}^*(j\omega) \prod_{i=1}^p W_{\text{эА}}^*(j\omega) = \\ &= \frac{N^*(j\omega)}{\prod_{i=1}^r (1 + 2\zeta_i T_i j\omega + (j\omega)^2 T_i^2) \prod_{i=1}^p (1 + T_i j\omega)}, \end{aligned}$$

где r — количество комплексных желаемых полюсов, p — количество вещественных желаемых полюсов.

Для астатической системы при $\omega = 0$ имеем $\Phi^*(j\omega) = 1$. Поэтому

$$\frac{K}{a_0 \prod_{i=1}^r \beta_i^2 \prod_{i=1}^p \alpha_i} = 1.$$

Если колебательная составляющая свободного процесса является доминирующей, что соответствует ближайшим к мнимой оси комплексным корням, а остальные корни лежат много левее, то логарифмические характеристики

$$\begin{aligned} \text{Lm}^*(\omega) &= 20 \lg |\Phi^*(j\omega)| = 20 \lg |N^*(j\omega)| - \\ &- \sum_{i=1}^r 20 \lg |1 + 2\zeta_i T_i j\omega - \omega^2 T_i^2| - \sum_{i=1}^p 20 \lg |1 + j\omega T_i|, \\ \varphi^*(\omega) &= \arg \{\Phi^*(j\omega)\} = \arg \{N^*(j\omega)\} - \\ &- \sum_{i=1}^r \arg \{1 + 2\zeta_i T_i j\omega - \omega^2 T_i^2\} - \sum_{i=1}^p \arg \{1 + j\omega T_i\} \end{aligned}$$

будут иметь примерный вид, представленный на рис. 7.7, где $L_1^*(\omega)$, $L_2^*(\omega)$ и $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$ соответствуют вторым и третьим слагаемым. Можно убедиться в том, что ошибка

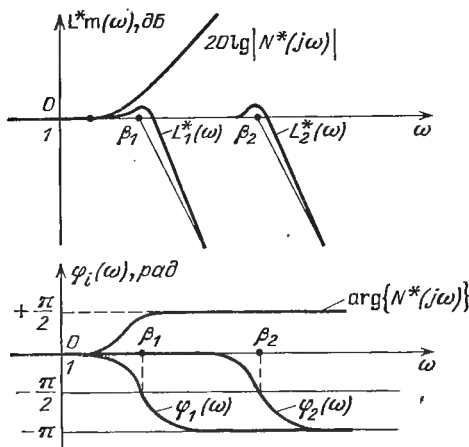


Рис. 7.7

по модулю и фазе при гармоническом управляющем сигнале с частотой ω_n определяется в основном доминирующими полюсами и фильтром $N^*(j\omega)$:

$$\text{Lm}(\omega_n) \approx 20 \lg |N^*(j\omega_n)| - 20 \lg |1 + 2\zeta_1 T_1 j\omega_n - \omega_n^2 T_1^2|,$$

$$\varphi(\omega_n) \approx \arg\{N^*(j\omega_n)\} - \arg\{1 + 2\zeta_1 T_1 j\omega_n - \omega_n^2 T_1^2\}.$$

Многокритериальная функция цели позволяет определить области Q_i допустимого расположения доминирующих полюсов передаточной функции замкнутой системы при одновременных ограничениях [45]:

1) на ошибку системы по фазе φ

$$\alpha_1, \beta_1 \in Q_1 = \{\text{tg } \varphi(\alpha_1, \beta_1, \omega) \leq \tau\}, \quad \omega \leq \omega_n;$$

2) на ошибку системы по модулю m

$$\alpha_1, \beta_1 \in Q_2 = \{m_1 \leq m(\alpha_1, \beta_1, \omega) \leq m_2\}, \quad \omega \leq \omega_n;$$

3) на длительность переходного процесса

$$\alpha_1 \in Q_3 = \{t_n(\alpha_1) \leq \tau_n\};$$

4) на колебательность системы

$$\alpha_1 \in Q_4 = \{\alpha_1 \leq \xi_1 \beta_1\}.$$

Функция цели достигнута, если

$$\alpha_1, \beta_1 \in Q^* = \bigcap_{i=1}^4 Q_i.$$

Для конкретизации полученных результатов рассмотрим желаемую доминантную аппроксимацию АФХ замкнутой следящей системы

$$\Phi^*(j\omega) = \frac{1 + j\omega T_\phi}{1 - \omega^2 T_K^2 + j\omega 2\zeta_1 T_K}.$$

Тангенс угла ошибки по фазе ограничивается величиной τ :

$$\tau = \operatorname{tg} \varphi \approx \frac{\omega [-2\zeta_1 T_K + T_\phi (1 - \omega^2 T_K^2)]}{\omega^2 T_\phi 2\zeta_1 T_K + 1 - \omega^2 T_K^2}.$$

После подстановки значений $\zeta_1 = \alpha_1/\beta_1$, $T_K = 1/\beta_1$ будем иметь

$$\tau = \frac{\omega [-2\alpha_1 + T_\phi (\beta_1^2 - \omega^2)]}{2\alpha_1 \omega^2 T_\phi + \beta_1^2 - \omega^2}.$$

В результате преобразований получим в выбранных относительных координатах β_1^2/ω и α_1/ω уравнение линий равных значений τ , откуда:

$$Q_1 = \left\{ \frac{\beta_1^2}{\omega^2} + \frac{2\alpha_1}{\omega C} \geq 1 \right\}, \quad C = \frac{\tau - \omega T_\phi}{1 + \omega T_\phi \tau} < 0,$$

где $\alpha_1 > 0$, $\beta_1^2 > 0$, ω — тестовая частота.

Модуль АФХ системы

$$m_1 \leq |\Phi^*(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_\phi^2}}{\sqrt{(1 - \omega^2 T_K^2)^2 + \omega^2 4\zeta_1^2 T_K^2}} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_\phi^2}}{\sqrt{b_i}} \leq m_p,$$

ограничен допустимыми значениями m_1 и m_2 . Если учесть

$$T_K^2 = \frac{1}{\beta_1^2}, \quad \zeta_1^2 = \frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2},$$

то получим уравнение эллипса для ограничения m_2 :

$$Q_2'' = \left\{ \sigma_2 \frac{\beta_1^4}{\omega^4} + 2 \frac{\beta_1^2}{\omega^2} - 4 \frac{\alpha_1^2}{\omega^2} \leq 1 \right\},$$

$$\sigma_2 = \frac{1 + \omega^2 T_{\Phi}^2}{m_2^2} - 1 = b_2 - 1 < 0, \quad b_2 < 1,$$

а для ограничения m_1 :

$$Q_2' = \left\{ \sigma_1 \frac{\beta_1^4}{\omega^4} + 2 \frac{\beta_1^2}{\omega^2} - \frac{4\alpha_1^2}{\omega^2} \geq 1 \right\},$$

$$\sigma_1 = \frac{1 + \omega^2 T_{\Phi}^2}{m_1^2} - 1 = b_1 - 1 < 0, \quad b_1 < 1.$$

Очевидное ограничение на длительность переходного процесса t_{π}

$$\frac{\alpha_1}{\omega} \geq \frac{4}{t_{\pi} \omega^3}$$

откуда

$$Q_3 = \left\{ \frac{\alpha_1}{\omega} \geq \frac{4}{t_{\pi} \omega} \right\}.$$

Ограничение на демпфирование системы

$$Q_4 = \left\{ \frac{\alpha_1}{\omega} \leq \zeta_1 \sqrt{\frac{\beta_1^2}{\omega^2}} \right\}.$$

Приведем пример синтеза следящей системы доминантного типа.

Пусть заданы: тестовая частота $\omega = 10 \frac{1}{c}$, коэффициент демпфирования не больше $\zeta = 0,3$, допустимая ошибка: по фазе $0^\circ 30'$, по модулю $1,05 \div 1,08$; время переходного процесса $t_{\pi} \leq 0,4$ с.

Введем относительные координаты β_1^2/ω^2 и α_1/ω . Получаем ограничение на длительность переходного процесса

$$Q_3 = \left\{ \frac{\alpha_1}{\omega} \geq \frac{4}{0,4 \cdot 10} = 1 \right\},$$

ограничение на демпфирование системы

$$Q_4 = \left\{ \frac{\alpha_1}{\omega} \leq 0,3 \sqrt{\frac{\beta_1^2}{\omega^2}} \right\}.$$

Проводим полученные линии ограничений Q_3 и Q_4 (рис. 7.8). Они пересекаются в точке с абсциссой 11,11. Эти два ограничения определили множество $Q_{34} = Q_3 \cap Q_4$.

Найдем ограничения на ошибку системы по фазе. Через точки $\{1; 0\}$ и $\{11,11; 1\}$ проводим прямую Q_1 , поскольку при этом условии множество Q_{34} не уменьшается.

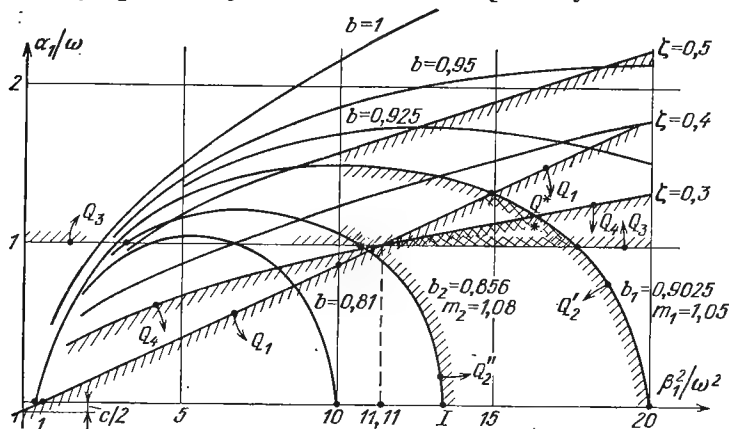


Рис. 7.8

Из подобия треугольников (рис. 7.8) определяем величину $C = -0,094$, откуда, принимая $\tau = \operatorname{tg} \varphi = -0,0087$, что соответствует ошибке по фазе $-30'$, получим при $\omega = 10 \frac{1}{c}$

$$\omega T_{\phi} = \frac{\tau - C}{1 - \tau C} = 0,086, \quad T_{\phi} = 0,0086 \text{ с.}$$

В результате запишем выражение для линии ограничения по фазе

$$Q_1 = \left\{ \frac{\beta_1^2}{\omega^2} - \frac{\alpha_1/\omega}{-0,047} \geq 1 \right\}.$$

Линиями ограничения на ошибки системы по модулю

$$Q_2 = \{1,05 \leq |\Phi(j\omega)| \leq 1,08\}$$

являются эллипсы

$$Q_2'' = \left\{ -0,144 \frac{\beta_1^4}{\omega^4} + 2 \frac{\beta_1^2}{\omega^2} - 4 \frac{\alpha_1^2}{\omega^2} \leq 1 \right\},$$

$$Q_2' = \left\{ -0,0975 \frac{\beta_1^4}{\omega^4} + 2 \frac{\beta_1^2}{\omega^2} - 4 \frac{\alpha_1^2}{\omega^2} \geq 1 \right\},$$

уравнения которых вытекают из выражения желаемой характеристики $\Phi^*(j\omega)$ при указанных выше данных. Результаты всех построений представлены на рис. 7.8, где Q^* — область допустимого решения.

Минимизируя β_1 , получим допустимое граничное решение в области Q^* в виде

$$\min \frac{\beta_1^2}{\omega^2} = 11,11; \quad \frac{\alpha_1}{\omega} = 1,0.$$

В результате, учитывая, что $\omega = 10 \frac{1}{c}$, будем иметь следующие численные значения доминирующих полюсов:

$$\alpha_1 = 10 \frac{1}{c}, \quad \omega_1 = \sqrt{\beta_1^2 - \alpha_1^2} = 31,8 \frac{1}{c}.$$

Подобный расчет можно повторить для определения численных значений всех остальных полюсов.

§ 7.3. Примеры прямого корневого метода синтеза другого типа

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (7.20)$$

Каждый коэффициент a_i ($i = 1, \dots, n$) является функцией от некоторых параметров объекта управления и параметров корректирующих цепей, т. е.

$$a_i = a_i(\mathbf{q}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (7.21)$$

где $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots]^T$ — искомый параметрический корректирующий вектор.

Для решения задачи модального синтеза введем в соответствии с (7.20) и (7.21) желаемый характеристический многочлен

$$D^*(\lambda) = (\lambda - \lambda_1^*)(\lambda - \lambda_2^*) \dots (\lambda - \lambda_n^*).$$

После раскрытия скобок получим

$$D^*(\lambda) = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n = 0, \quad (7.22)$$

где λ_i^* — желаемые значения корней характеристического многочлена, лежащие в заданных пределах:

$$\lambda_i' \leq \lambda_i^* \leq \lambda_i'', \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$b_i = b_i(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*). \quad (7.23)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{T_M} + \frac{1}{T_J} + q_1, \quad a_2 = \frac{1}{T_M} \left(\frac{1}{T_J} + q_1 \right) + \frac{k_M}{J} \left(\frac{k_E}{L_J} + q_2 \right),$$
$$a_3 = \frac{k_M}{J} q_3.$$

Задаемся спектром матрицы A :

$$\lambda_{1,2}^* = -\alpha_1 \pm j\omega_1, \quad \lambda_3^* = -\alpha_3.$$

После подстановки этих значений в уравнение

$$D^*(\lambda) = (\lambda - \lambda_1^*)(\lambda - \lambda_2^*)(\lambda - \lambda_3^*) = 0$$

получим желаемое характеристическое уравнение

$$D^*(\lambda) = \lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0,$$

где

$$b_1 = 2\alpha_1 + \alpha_3, \quad b_2 = \alpha_1^2 + \omega_1^2 + 2\alpha_1\alpha_3, \quad b_3 = (\alpha_1^2 + \omega_1^2)\alpha_3.$$

В результате приравнивания коэффициентов характеристических уравнений проектируемой и желаемой систем будем иметь следующие функции реализации:

$$a_1 = \frac{1}{T_M} + \frac{1}{T_J} + \frac{C_1}{L_J} = b_1,$$

$$a_2 = \frac{1}{T_M} \left(\frac{1}{T_J} + \frac{C_1}{L_J} \right) + \frac{k_M}{J} \left(\frac{k_E}{L_J} + \frac{C_2}{L_J} \right) = b_2,$$

$$a_3 = \frac{k_M}{J} \frac{C_3}{L_J} = b_3.$$

Отсюда следует возможность непосредственного решения задачи модального синтеза в виде

$$C_1 = \left(b_1 - \frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_J} \right) L_J,$$

$$C_2 = \frac{L_J J}{k_M} \left(b_2 - \frac{b_1}{T_M} + \frac{1}{T_M^2} \right) - k_E,$$

$$C_3 = \frac{b_3 J L_J}{k_M}.$$

где C_1 , C_2 , C_3 — определяемые при синтезе коэффициенты передачи от измеряемых координат пространства состояний системы, т. е. от тока в цепи якоря, от скорости

вращения, от угла поворота исполнительного двигателя до входного напряжения цепи якоря.

Наконец, приведем еще простой пример *прямого метода синтеза корректирующей обратной связи* следящей системы по желаемому расположению корней характеристического уравнения замкнутой системы.

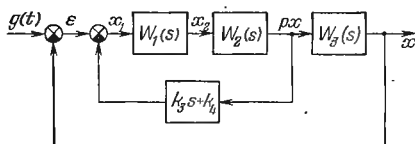


Рис. 7.9

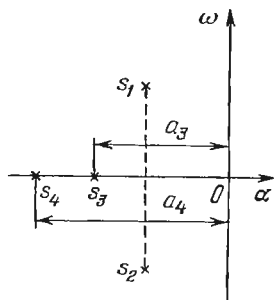


Рис. 7.10

Схема системы показана на рис. 7.9. Заданы

$$W_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, \quad W_2(s) = \frac{k_2}{T_2^2 s^2 + T_3 s + 1}, \quad W_3(s) = \frac{1}{s}.$$

Требуется найти значения коэффициентов k_3 и k_4 дополнительной обратной связи, приводящие к желаемому расположению корней (рис. 7.10), и коэффициент усиления прямой цепи системы $k = k_1 k_2$.

Согласно схеме имеем

$$W(s) = \frac{W_1(s) W_2(s) W_3(s)}{1 + W_1(s) W_2(s) (k_3 s + k_4)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{W_1(s) W_2(s) W_3(s)}{1 + W_1(s) W_2(s) [k_3 s + k_4 + W_3(s)]} = \\ &= \frac{k}{s (T_1 s + 1) (T_2^2 s^2 + T_3 s + 1) + k(k_3 s^2 + k_4 s + 1)}. \end{aligned}$$

Отсюда характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$\begin{aligned} s^4 + \frac{T_1 T_3 + T_2^2}{T_1 T_2^2} s^3 + \frac{T_1 + T_3 + k k_3}{T_1 T_2^2} s^2 + \\ + \frac{1 + k k_4}{T_1 T_2^2} s + \frac{k}{T_1 T_2^2} = 0, \quad (7.25) \end{aligned}$$

а желаемому расположению корней (рис. 7.10) соответствует уравнение с заданными коэффициентами

$$(s^2 + a_1 s + a_2^2)(s + a_3)(s + a_4) = 0,$$

или

$$s^4 + (a_1 + a_3 + a_4)s^3 + (a_2^2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_3 a_4)s^2 + (a_1 a_3 a_4 + a_2^2 a_3 + a_2^2 a_4)s + a_2^2 a_3 a_4 = 0.$$

Приравнявая коэффициенты этого уравнения и уравнения (7.25), получаем соотношение

$$a_1 + a_3 + a_4 = \frac{T_1 T_3 + T_2^2}{T_1 T_2^2} \quad (7.26)$$

и значения искомых коэффициентов

$$k = a_2^2 a_3 a_4 T_1 T_2^2,$$

$$k_3 = \frac{T_1 T_2^2}{k} (a_2^2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_3 a_4) - \frac{T_1 + T_3}{k},$$

$$k_4 = \frac{T_1 T_2^2}{k} (a_1 a_3 a_4 + a_2^2 a_3 + a_2^2 a_4) - \frac{1}{k}.$$

Условие (7.26) накладывает одну связь на произвол выбора расположения корней — условие физической реализуемости в данной системе.

§ 7.4. Программа корневого метода синтеза корректирующих цепей

Рассматривается класс линейных стационарных систем управления, находящихся в свободном состоянии

$$\dot{x} = Ax, \quad (7.27)$$

где x есть n -мерный вектор состояния системы.

Запишем характеристическое уравнение

$$D(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (7.28)$$

или

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (7.29)$$

коэффициентами которого a_i ($i = 1, \dots, n$) являются функциями от параметров объекта и параметров вводимых корректирующих цепей.

Составим желаемое характеристическое уравнение

$$D^*(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n = 0, \quad (7.30)$$

где λ_i ($i = 1, \dots, n$) — заданные желаемые значения корней, а коэффициенты уравнения $b_i = b_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Приравнявая соответствующие коэффициенты уравнений (7.29) и (7.30), получим в общем случае систему нелинейных алгебраических уравнений, устанавливающую соответствие между желаемыми корнями характеристического уравнения и неизвестными пока параметрами корректирующих цепей,

$$a_i(q_1, \dots, q_n) - b_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7.31)$$

где $q_1, \dots, q_n$ — параметры корректирующих цепей.

Таким образом, задача состоит в построении алгоритма, позволяющего по заданной матрице A , содержащей известные значения параметров системы и неизвестные параметры корректирующих цепей, получить функциональную зависимость коэффициентов уравнения (7.29) от параметров корректирующих цепей. Такие функциональные зависимости позволяют, задаваясь желаемыми значениями корней характеристического уравнения, из системы уравнений (7.31) определить параметры корректирующих цепей.

Неизвестным параметрам корректирующих цепей или их обратным величинам присвоим символические буквенно-цифровые имена и будем называть их символическими множителями. Тогда каждый элемент матрицы A можно представить в виде целого рационального алгебраического выражения

$$a_{ij} = c_{ij1} + \sum_{l=2}^{k_{ij}} c_{ijl} \prod_{r=1}^{m_{ijl}} d_{ijlr}, \quad (7.32)$$

где k_{ij} — число слагаемых у элемента a_{ij} ;

c_{ijl} — действительное число, $l = 1, \dots, k_{ij}$;

m_{ijl} — число символических множителей у l -го слагаемого;

d_{ijlr} — r -й символический множитель у l -го слагаемого.

При раскрытии определителя (7.28) требуется выполнять операции с многочленами от λ и алгебраическими выражениями вида (7.32).

Поэтому реализован алгоритм раскрытия определителя, в основу которого положено определение *):

$$\det A = \sum_{n!} (-1)^r a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_{n_i}} \quad (7.33)$$

где сумма должна быть распространена на $n!$ различных упорядоченных множеств $i_1, i_2, \dots, i_n$, полученных попарно перестановками элементов из множества $1, 2, \dots, n$.

Для получения всех перестановок из n чисел $1, 2, \dots, n$ использован алгоритм 115б **) с наибольшим быстродействием, который получает попеременно четные или нечетные перестановки, что облегчает вычисление знака в выражении (7.33). Матрица A является, как правило, разреженной, поэтому для повышения быстродействия перед вычислением каждого слагаемого (7.33) производится проверка на наличие нулевых элементов и исключение слагаемых, содержащих нулевые сомножители. За счет этого раскрытие определителя по выражению (7.33) является вполне приемлемым по затратам машинного времени для $n \leq 10$, что достаточно для большинства практических задач теории управления.

Искомые коэффициенты характеристического уравнения представим аналогично (7.32) в виде

$$a_i = g_{i1} + \sum_{l=2}^{p_i} g_{il} \prod_{r=1}^{r_{il}} v_{lri}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7.34)$$

где p_i — число слагаемых в выражении для коэффициента a_i ;

g_{il} — числовые множители, $l = 1, \dots, p_i$;

z_{il} — число символических множителей у l -го слагаемого;

v_{lri} — r -й символический множитель у l -го слагаемого.

*) Корн Г. А., Корн Т. Н. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1984.

**) Агеев М. И., Алиев В. П., Марков Ю. И. Библиотека алгоритмов, 101б—150б. — М.: Сов. радио, 1978.

В алгоритме коэффициенты a_i описываются массивами:

$$R_1 = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1p_1} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2p_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{np_n} \end{bmatrix},$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} z_{12} & z_{13} & \dots & z_{1p_1} \\ z_{22} & z_{23} & \dots & z_{2p_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n2} & z_{n3} & \dots & z_{np_n} \end{bmatrix},$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} v_{211} & v_{221} & \dots & v_{2z_{12}^1} \\ v_{311} & v_{321} & \dots & v_{3z_{13}^1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{p_1 11} & v_{p_1 21} & \dots & v_{p_1 z_{1p_1}^1} \end{bmatrix}, \quad (7.35)$$

где R_1 — вектор, определяющий число слагаемых у коэффициентов a_i ; R_2 — матрица числовых множителей у слагаемых коэффициента a_i ; R_3 — матрица, определяющая число символических множителей; R_4 — трехмерный массив символических множителей v_{lri} , представленный при $i = 1$.

Задача нахождения коэффициентов характеристического уравнения состоит в формировании массивов (7.35), что осуществляется путем реализации алгоритмов сложения и умножения элементов матрицы A , заданных величинами k_{ij} , c_{ijl} , m_{ijl} , d_{ijlr} из выражения (7.32).

Для использования прямого метода синтеза коррекции систем управления введем массив X неизвестных параметров q_i , корректирующих цепей:

$$X = (q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (7.36)$$

Если в качестве значений элементов v_{lri} массива R_4 использовать соответствующие индексы элементов массива X и задать некоторые значения параметрам q_i , то выражение (7.31) позволяет вычислить значения коэффициентов характеристического уравнения с использованием массивов (7.35).

Для нахождения корней уравнений (7.31) использован метод Ньютона решения системы нелинейных алгебраических уравнений, который в процессе вычислений исполь-

зует матрицу частных производных

$$F = [f_{ij}] = \left[\frac{\partial a_i}{\partial q_j} \right], \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (7.37)$$

Произведение символических множителей из выражения (7.34) в общем случае имеет вид

$$\prod_{r=1}^{z_{il}} v_{lri} = q_1^{\alpha_{il1}} \dots q_j^{\alpha_{ilj}} \dots q_n^{\alpha_{iln}}, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_{ilj} = z_{il}. \quad (7.38)$$

Тогда выражение для f_{ij} будет

$$\frac{\partial a_i}{\partial q_j} = \sum_{l=2}^{p_i} g_{il} \alpha_{ilj} q_1^{\alpha_{il1}} \dots q_j^{\alpha_{ilj}-1} \dots q_n^{\alpha_{iln}}, \quad (7.39)$$

что позволяет формализовать получение частных производных от выражений (7.34) для коэффициентов характеристического уравнения и вычислять значения частных производных с использованием информации из матриц (7.35).

По предложенным алгоритмам синтеза реализована программа на алгоритмическом языке Фортран-IV для ЕС ЭВМ, текст которой представлен в приложении 1. Рассматривается линейная непрерывная динамическая система с введенными корректирующими цепями, заданная в пространстве состояний матрицей A (7.27), элементами которой являются целые рациональные алгебраические выражения, включающие численные значения параметров системы и символические обозначения неизвестных параметров корректирующих цепей (символические множители). Программа позволяет получить выражения для коэффициентов характеристического уравнения системы, определить численные значения параметров корректирующих цепей на основе прямого метода синтеза коррекции при задании желаемых корней характеристического уравнения и раскрыть определитель матрицы с элементами в виде алгебраических выражений, включающих символические имена.

Для использования программы неизвестным параметрам корректирующих цепей необходимо присвоить символические буквенно-цифровые имена и представить каждый элемент матрицы A в виде целого рационального алгебраического выражения (7.32).

В том случае, если параметры корректирующих цепей присутствуют в знаменателе элементов матрицы A , необходимо присвоить символические имена величинам, обратным этим параметрам.

Программа параметрического синтеза корректирующих цепей включает основную программу, подпрограмму FUN, подпрограмму BLOCK DATA и для решения системы нелинейных алгебраических уравнений использует подпрограмму DSNEN из «Пакета научных подпрограмм» математического обеспечения ЕС ЭВМ.

Основная программа осуществляет ввод во входном потоке исходной информации, производит требуемые вычисления и выводит на печать исходные данные и полученные результаты.

Подпрограмма FUN используется подпрограммой DSNEN для вычисления значений выражений (7.31) и матрицы частных производных (7.37).

Подпрограмма BLOCK DATA предназначена для обнуления рабочих массивов.

Программа имеет следующие ограничения:

- максимальный порядок матрицы A — 10;
- максимальное число слагаемых у каждого элемента матрицы A — 5;
- число символических множителей у каждого слагаемого матрицы A не должно превышать 5;
- число слагаемых у получаемых коэффициентов характеристического уравнения должно быть не больше 101, а число символических множителей у этих слагаемых — не более 10;
- символические имена должны состоять не более чем из четырех символов, включая буквы русского и латинского алфавитов, цифры и специальные знаки.

Требуемая для программы оперативная память — 310 Кбайт.

Для решения задач, не укладывающихся в приведенные количественные ограничения, необходимо увеличить граничные значения в описании соответствующих массивов.

Ввод исходной информации производится следующим образом.

Первая перфокарта исходных данных определяет, какие действия должны быть выполнены программой. В первой позиции размещается одно из ключевых слов: CHAR — получение характеристического уравнения;

SINT — определение параметров корректирующих цепей;

DET — раскрытие определителя.

На второй перффокарте в формате 15 задается размерность матрицы A .

Начиная с третьей перффокарты по формату 10I5 построчно вводится матрица размера $n \times n$, элементы которой в соответствии с (7.32) определяют число слагаемых у элементов матрицы A , а именно:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}.$$

С $(n+3)$ -й перффокарты по формату 8EI0.3 построчно вводится матрица размера $n \times n$, задающая значения первых слагаемых элементов матрицы A , т. е.

$$\begin{bmatrix} c_{111} & c_{121} & \dots & c_{1n1} \\ c_{211} & c_{221} & \dots & c_{2n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n11} & c_{n21} & \dots & c_{nn1} \end{bmatrix}.$$

Если $n > 8$, то для ввода каждой строки матрицы требуется две перффокарты.

Затем вводятся вторые и последующие слагаемые матрицы A . Порядок ввода: при обходе матрицы по строкам определяется элемент, у которого число слагаемых не меньше двух, и последовательно вводятся все слагаемые этого элемента, потом осуществляется переход к следующему элементу с числом слагаемых не меньше двух и вводятся его слагаемые и т. д.

Для кодирования l -го слагаемого требуется две перффокарты. На первой перффокарте по формату (I5, EI0.3) перффорировается число символических множителей m_{ijl} и значение числового множителя c_{ijl} у слагаемого. На второй перффокарте задаются имена символических множителей слагаемого, под каждое из которых отводится по четыре позиции. При перффорировании символических множителей необходимо следить, чтобы одинаковые символические имена занимали одинаковые позиции в поле ввода из четырех позиций, иначе программа будет воспринимать их как различные параметры.

В случае синтеза коррекции необходимо ввести желаемые значения корней характеристического уравнения,

определяющие динамические свойства системы. Под значение каждого корня отводится одна перффокарта, формат 2E10.3, первые 10 позиций занимает вещественная составляющая корня, а вторые 10 позиций — мнимая.

Вслед за желаемыми корнями вводится по формату 8E10.3 перффокарта с начальными значениями параметров корректирующих цепей. Начальные значения задаются в порядке появления параметров корректирующих цепей в матрице A при ее построчном обходе. Если $n > 8$, то для ввода начальных значений требуется две перффокарты.

На последней перффокарте в формате E10.3 перффорировается точность решения системы нелинейных уравнений.

Вывод информации на печать производится следующим образом.

Для удобства пользования программой после заголовка, определяющего выполняемые программой действия, распечатывается с соответствующими пояснениями вводимая информация о матрице A . Затем, в зависимости от сделанного выбора, печатаются полученные коэффициенты характеристического уравнения в соответствии с обозначениями, принятыми в (7.29), или определитель матрицы. Каждое слагаемое печатается с новой строки, в скобках указывается значение числового сомножителя со знаком, а затем вместе с символом умножения (*) печатаются символические множители.

При синтезе коррекции распечатываются вводимые значения желаемых корней, начальные значения параметров и точность решения системы нелинейных алгебраических уравнений, а затем — полученные значения коэффициентов желаемого характеристического уравнения и соответствующие им значения параметров корректирующих цепей.

При вводе исходных данных проводится их проверка на правильность представления и соблюдение ограничений, накладываемых программой. В процессе выполнения программы контролируется число символических множителей и число слагаемых у получаемых коэффициентов характеристического уравнения. Если обнаруживаются ошибки, то выводятся поясняющие сообщения и задание снимается.

Рассмотрим пример.

Для следящей системы, структурная схема которой представлена на рис. 7.11, а параметры имеют значения $k_y = 26$, $k_d = 0,0092 \text{ с}^{-1} \cdot \text{В}$, $T_m = 1,53 \text{ с}$, требуется осу-

ществить синтез параллельного корректирующего устройства, включение которого показано на структурной схеме рис. 7.12. Требуется определить параметры корректирующих цепей $k_{\text{и}}$, T_y , $k_{\text{ос}}$, $T_{\text{ос}}$, обеспечивающие время переходного процесса $t_{\text{п}} \leq 0,8$ с и колебательность $\mu \leq 1,57$.

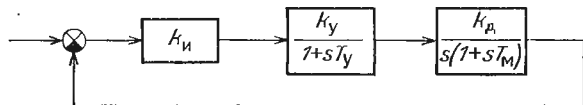


Рис. 7.11

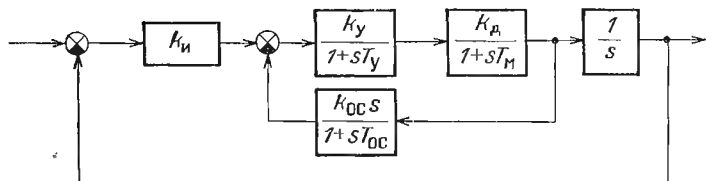


Рис. 7.12

Матрица A , описывающая систему с введенными корректирующими цепями, имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} -zT_y & 0 & -k_y k_{\text{и}} zT_y & -k_y zT_y \\ \frac{k_{\text{п}}}{T_{\text{М}}} & -\frac{1}{T_{\text{М}}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_{\text{п}}}{T_{\text{М}}} k_{\text{ос}} T_{\text{ос}} & -\frac{1}{T_{\text{М}}} k_{\text{ос}} zT_{\text{ос}} & 0 & -zT_{\text{ос}} \end{bmatrix},$$

где введены обозначения $zT_y = \frac{1}{T_y}$, $zT_{\text{ос}} = \frac{1}{T_{\text{ос}}}$.

Динамические свойства замкнутой следящей системы определяются, в основном, ближайшими доминирующими комплексными полюсами $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$. Поэтому из ограничения на длительность переходного процесса определяем вещественную составляющую ближайшего к мнимой оси комплексного корня $\alpha = \frac{4}{t_{\text{п}}} = 5$, а из заданной колебательности определяем мнимую составляющую $\beta \leq \leq 1,57\alpha$, т. е. $\beta = 7,8$.

Корни λ_3 и λ_4 положим вещественными, величина модулей которых значительно больше величины α . Таким

образом, скорректированная система должна иметь следующие корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = -5 \pm j7,8; \quad \lambda_3 = -8; \quad \lambda_4 = -20.$$

Представление на бланке для перффорации исходных данных рассматриваемого примера приведено в приложении 2, а результаты расчета представлены в приложении 3. Анализ результатов показывает, что коэффициенты характеристического уравнения имеют вид

$$a_1 = 0,654 + \frac{1}{T_{oc}} + \frac{1}{T_y},$$

$$a_2 = \frac{0,654}{T_{oc}} + \frac{1}{T_{oc}T_y} + \frac{0,654}{T_y} + \frac{0,156k_{oc}}{T_{oc}T_y},$$

$$a_3 = \frac{0,654}{T_{oc}T_y} + \frac{0,156k_{\kappa}}{T_y},$$

$$a_4 = \frac{0,156k_{\kappa}}{T_{oc}T_y}.$$

а искомые параметры корректирующих цепей принимают значения $k_{oc} = 20,74 \text{ В} \cdot \text{с}^2$, $k_{\kappa} = 743,5 \text{ В}$, $T_y = 0,03 \text{ с}$, $T_{oc} = 0,286 \text{ с}$.

Для наглядности здесь приведен простейший пример. Но, как видно из описания алгоритма, приведенного выше, и из текста программы (приложение 1), данным методом могут быть решены задачи проектирования и более сложных систем управления прямым корневым методом синтеза.

§ 8.1. Особенности многомерных систем автоматического управления

В предыдущих главах (1—6) изучались одномерные системы. Они могли иметь сложную структуру и много контуров, но в них имелась одна выходная регулируемая величина x . Входов могло быть несколько, например, ряд возмущающих воздействий $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., но только одно задающее воздействие $g(t)$ (см. рис. В.2 во введении).

Многомерными (или многосвязными) системами называются такие системы, которые имеют две или несколько входных задающих величин (g_1 , g_2 , ...) и выходных регулируемых величин (x_1 , x_2 , ...) (см. рис. 8.1). При этом может иметься также любое число возмущающих воздействий (f_1 , f_2 , ...).

Рассмотрим здесь особенности, которые отличают многомерные системы от подробно уже изученных обычных одномерных систем автоматического управления.

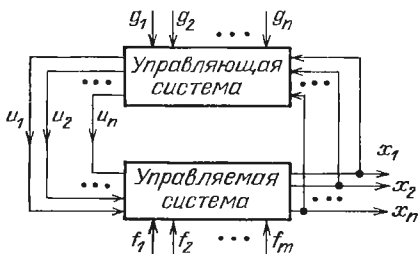


Рис. 8.1

Многомерные системы могут включать в себя один управляемый объект с несколькими регулируемыми органами и регулируемыми величинами (например, самолет с рулями поворота, высоты, с элеронами и регулятором тяги, и соответственно с регулируемыми отклонениями по курсу, тангажу, крену, скорости и высоте). Но могут быть многомерные системы и с несколькими управляемыми объектами, объединенными единой системой

управления, в которой организуется определенная требуемая взаимосвязь между регулируемыми величинами всех объектов. Системы указанного типа часто встречаются в энергетических системах.

Взаимосвязи, образующие многомерность системы, могут быть различными. Обычно их делят на внутренние и внешние связи (по отношению к объекту управления). Последние имеют характер перекрестных связей в системе управления.

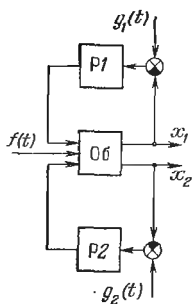


Рис. 8.2

Внутренние связи — это связи, физически существующие между выходными (регулируемыми) величинами в самом объекте. Математически эти связи заложены в уравнениях динамики объекта. Упрощенно схематически такого типа система изображена на рис. 8.2, где один управляемый объект (Об) имеет две регулируемые величины x_1 , x_2 и два регулятора (Р1, Р2). В качестве примера может

служить управление движением самолета. Обычно разделяют движение самолета на боковое и продольное. В боковом движении оказываются взаимосвязанными в самих уравнениях динамики полета две выходные величины — курс и крен. В продольном движении взаимосвязаны три величины — тангаж, высота и скорость.

Внешние связи — это связи, организуемые в системе управления (перекрестные связи между регуляторами). На рис. 8.3 показаны четыре основные разновидности таких внешних связей [5]. На рис. 8.3, а, показаны связи (С1, С2, С3, С4) на входе регуляторов (Р1, Р2); на рис. 8.3, б — на выходе регуляторов, затем — смешанные связи (рис. 8.3, в) и каскадные связи (рис. 8.3, г).

Задача перекрестных связей, специально вводимых в систему управления при ее проектировании, может быть двойной. В одних случаях требуется организовать определенные взаимосвязи между регулируемыми величинами. В других же случаях, наоборот, требуется при помощи внешних связей ликвидировать взаимосвязь между регулируемыми величинами, существующую физически внутри объекта, чтобы каждой из них в многосвязной системе можно было управлять отдельно, независимо от других. Последний случай называется задачей автоном-

ного регулирования (когда изменение одной регулируемой величины не приводит к изменению других). Автономное регулирование (развязывающие перекрестные связи) применяется часто в энергетических установках.

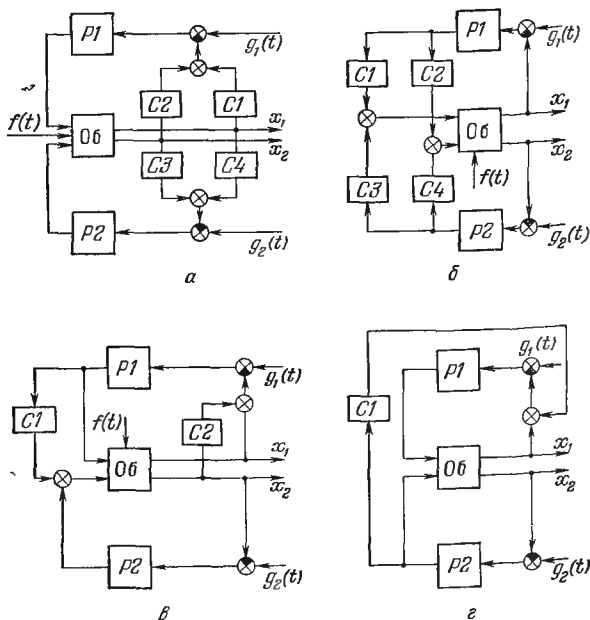


Рис. 8.3

Примером системы, в которой организуется требуемая взаимосвязь, может служить система автоматического управления координированным разворотом самолета. В этой системе при изменении заданным образом курса полета одновременно по определенному закону должен меняться также и крен самолета. Целесообразность такого разворота самолета с определенным креном очевидна.

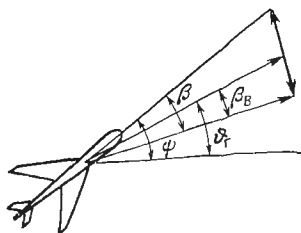


Рис. 8.4

Приведем как пример уравнения динамики и структурную схему бокового движения самолета (рис. 8.4). Линеаризованные дифференциальные уравнения динамики

ки в нормальной форме имеют вид

$$\dot{\omega}_H = -\left(\frac{1}{T_H} + k_{\omega H}\right)\omega_H - k_{\delta H}\delta_H - k_{\omega\psi}\omega_\psi - k_{\psi}\psi + k_{\psi}\psi_0,$$

$$\dot{\delta}_H = \omega_H,$$

$$\dot{\omega}_\psi = a_{\delta H}\delta_H - \frac{1}{T_\psi}\omega_\psi - a_{\omega\gamma}\omega_\gamma - a_{\beta H}\beta,$$

$$\dot{\psi} = \omega_\psi,$$

$$\dot{\beta} = \omega_\psi - \frac{1}{T_\beta}\beta - a_{\beta\gamma}\gamma + \dot{\beta}_B,$$

$$\dot{\omega}_\delta = -\left(\frac{1}{T_\delta} + k_{\omega\delta}\right)\omega_\delta - k_{\delta\delta}\delta_\delta - k_{\omega\gamma}\omega_\gamma - k_{\gamma}\gamma + k_{\gamma}\gamma_0,$$

$$\dot{\delta}_\delta = \omega_\delta,$$

$$\dot{\omega}_\gamma = -a_{\omega\psi}\omega_\psi - a_{\beta\delta}\beta + a_{\delta\delta}\delta_\delta - \frac{1}{T_\gamma}\omega_\gamma,$$

$$\dot{\gamma} = \omega_\gamma, \quad \dot{\vartheta}_\Gamma = \psi - \beta + \beta_B,$$

где переменные ψ — угол рыскания, β — угол скольжения, β_B — угол сноса от ветра, γ — угол крена, ϑ_Γ — угол отклонения траектории, δ_H — угол поворота руля направления, δ_δ — угол поворота элеронов, a_{ij} — коэффициенты, учитывающие аэродинамические свойства, массу, скорость и момент инерции самолета, k_{ij} — коэффициенты усиления системы управления, T_i — постоянные времени.

Записанную систему уравнений легко представить в векторно-матричной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{y}, \quad (8.1)$$

$$\vartheta_\Gamma = \psi - \beta + \beta_B, \quad (8.2)$$

где

$$\mathbf{x} = [\omega_H, \delta_H, \omega_\psi, \psi, \beta, \omega_\delta, \delta_\delta, \omega_\gamma, \gamma]^T,$$

$$\mathbf{y} = [\psi_0, \dot{\beta}_B, \gamma_0]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} A_H & \vdots & A_{\gamma H} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{H\gamma} & \vdots & A_\gamma \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_H \\ \vdots \\ B_\gamma \end{bmatrix}.$$

причем

$$A_H = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{T_H} + k_{\omega H}\right) & -k_{\delta H} & -k_{\omega \psi} & -k_{\psi} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{\delta H} & -\frac{1}{T_{\psi}} & 0 & -a_{\beta H} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{T_{\beta}} \end{bmatrix},$$

$$A_{\gamma H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{\omega \gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{\beta \gamma} \end{bmatrix},$$

$$A_{H\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{\omega \psi} & 0 & -a_{\beta \psi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{\gamma} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{T_{\gamma}} + k_{\omega \gamma}\right) & -k_{\delta \gamma} & -k_{\omega \gamma} & -k_{\gamma} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{\delta \gamma} & -\frac{1}{T_{\gamma}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_H = \begin{bmatrix} k_{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, структурная схема системы управления боковым движением самолета принимает вид многомерной системы, показанной на рис. 8.5.

Здесь показаны входные величины ψ_0 и γ_0 , управляющие углами курса и крена, одна возмущающая β_v и три выходные величины ψ , γ , θ_r . На схеме видны основные каналы передачи воздействий и сложные перекрестные связи между ними. Все это четко отражено и в матричной форме записи дифференциальных уравнений системы (8.1).

Характеристическое уравнение системы запишется в виде

$$D(\lambda) =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{T_H} + k_{\omega H} & k_{\delta H} & k_{\omega \psi} & k_{\psi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{\delta H} & \lambda + \frac{1}{T_\psi} & 0 & a_{\beta H} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda + \frac{1}{T_\beta} & 0 & 0 & 0 & a_{\beta \gamma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda + \frac{1}{T_\theta} + k_{\omega \theta} & k_{\delta \theta} & k_{\omega \gamma} & k_{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{\omega \psi} & 0 & a_{\beta \theta} & 0 & -a_{\delta \theta} & \lambda + \frac{1}{T_\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

по которому, например, рассмотренными в главе 7 методами можно осуществить синтез параметров системы, находящейся в свободном движении, а по уравнению (8.1) провести анализ переходных процессов по всем координатам вектора состояния полученной многомерной системы.

В качестве другого примера приведем динамическую систему электропривода с перекрестными связями в механических цепях. Линеаризованные уравнения динамики этой системы в нормальной форме имеют вид:

$$\dot{i}_1 = \frac{1}{L_1} (-R_1 i_1 - k_{E1} \Omega_1 - k_{\pi 1} k_{v1} \vartheta_1 + k_{v1} v_1),$$

$$\dot{i}_2 = \frac{1}{L_2} (-R_2 i_2 - k_{E2} \Omega_2 - k_{\pi 2} k_{v2} \vartheta_2 + k_{v2} v_2),$$

$$\dot{\Omega}_1 = \frac{1}{J_1} (k_{m1} i_1 - B_1 \Omega_1 - k_2 \Omega_2 - k_{\theta 2} \vartheta_2),$$

$$\dot{\Omega}_2 = \frac{1}{J_2} (k_{m2} i_2 - B_2 \Omega_2 - k_1 \Omega_1 - k_{\theta 1} \vartheta_1),$$

$$\dot{\vartheta}_1 = k_{p1} \Omega_1,$$

$$\dot{\vartheta}_2 = k_{p2} \Omega_2,$$

где $i_1, i_2, \Omega_1, \Omega_2, \vartheta_1, \vartheta_2$ — координаты пространства состояний электромеханической системы (соответственно — токи в цепях якорей, скорости вращения и углы поворота электродвигателей постоянного тока; L_1, L_2, R_1, R_2 — па-

параметры электрических цепей; J_1, J_2, B_1, B_2 — параметры механических цепей; k_{ij} — коэффициенты, характеризующие связи в системе; v_1 и v_2 — входные величины. Соответствующая этим уравнениям структурная схема с учетом всех динамических взаимосвязей между подсистемами приведена на рис. 8.6.

Запишем данную систему уравнений в векторно-матричной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{y}, \quad (8.3)$$

где

$$\mathbf{x} = [i_1, \Omega_1, \vartheta_1, i_2, \Omega_2, \vartheta_2]^T, \quad \mathbf{y} = [v_1, v_2]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{21} \\ A_{12} & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

причем

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{k_{E1}}{L_1} & -\frac{k_{\Pi 1} k_{v1}}{L_1} \\ \frac{k_{M1}}{J_1} & -\frac{B_1}{J_1} & 0 \\ 0 & k_p & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{J_1} & -\frac{k_{\vartheta 2}}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_1}{J_2} & -\frac{k_{\vartheta 1}}{J_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{L_2} & -\frac{k_{E2}}{L_2} & -\frac{k_{\Pi 2} k_{v2}}{L_2} \\ \frac{k_{M2}}{J_2} & -\frac{B_2}{J_2} & 0 \\ 0 & k_{p2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{k_{v1}}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_{v2}}{L_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение системы будет

$$D(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda E - A_1 & -A_{21} \\ -A_{12} & \lambda E - A_2 \end{vmatrix} = 0.$$

В развернутом виде, подготовленном к решению задачи синтеза методами главы 7, характеристическое уравнение

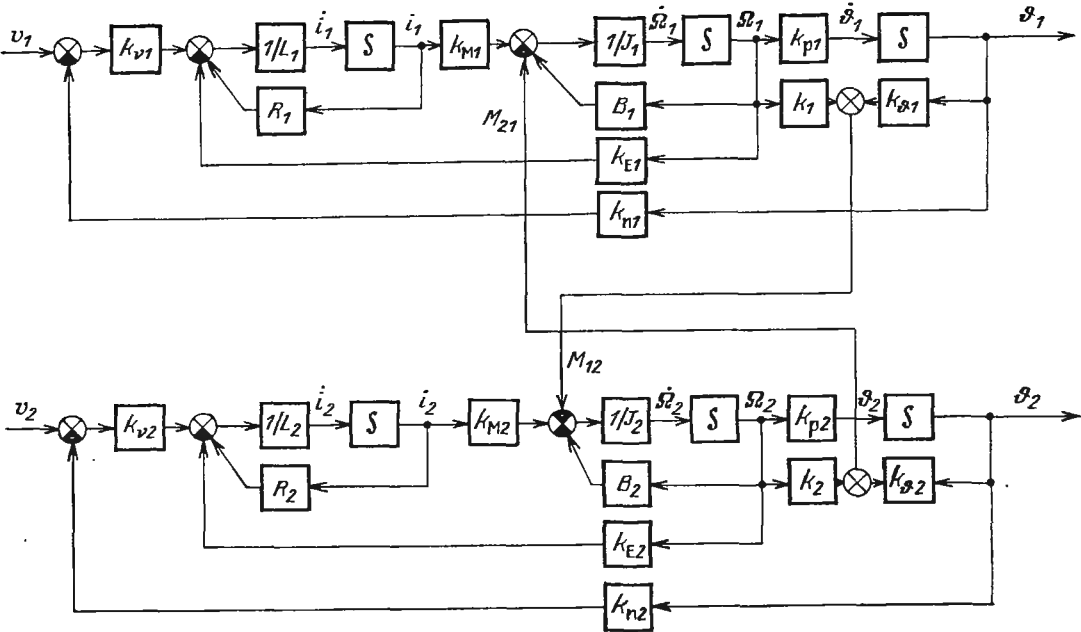


Рис. 8.6

многомерной системы запишется так

$$D(\lambda) =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc|ccc} \lambda + \frac{1}{T_{\text{эл}}} & \frac{k_{\text{Е1}}}{L_1} & \frac{k_{\text{м1}}k_{\text{в1}}}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_{\text{м1}}}{J_1} & \lambda - \frac{1}{T_{\text{м1}}} & 0 & 0 & \frac{k_2}{J_1} & \frac{k_{\theta 2}}{J_1} \\ 0 & -k_{\text{р1}} & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda + \frac{1}{T_{\text{э2}}} & \frac{k_{\text{Е2}}}{L_2} & \frac{k_{\text{п2}}k_{\text{в2}}}{L_2} \\ 0 & \frac{k_1}{J_2} & \frac{k_{\theta 1}}{J_2} & \frac{k_{\text{м2}}}{J_2} & \lambda + \frac{1}{T_{\text{м2}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{\text{р2}} & \lambda \end{array} \right| = 0.$$

В качестве третьего примера приведем динамическую схему манипулятора промышленного робота. Вообще многозвенная система робота может иметь много степеней подвижности. Рассмотрим случай манипулятора с тремя степенями подвижности, схематически показанного на рис. 8.7. Линеаризованные уравнения динамики этой системы в операторной форме имеют вид [14]:

$$\begin{aligned} a_{11}p^2\alpha_1 + a_{12}p^2\alpha_2 + a_{13}p^2\alpha_3 + c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + c_{13}\alpha_3 + \\ + f_1p\alpha_1 = (k_{11} + k_{12}p)\gamma_1 + M_1, \quad p = \frac{d}{dt}, \\ a_{21}p^2\alpha_1 + a_{22}p^2\alpha_2 + a_{23}p^2\alpha_3 + c_{21}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + c_{23}\alpha_3 + \\ + f_2p\alpha_2 = (k_{21} + k_{22}p)\gamma_2 + M_2, \\ a_{31}p^2\alpha_1 + a_{32}p^2\alpha_2 + a_{33}p^2\alpha_3 + c_{31}\alpha_1 + c_{32}\alpha_2 + c_{33}\alpha_3 + \\ + f_3p\alpha_3 = (k_{31} + k_{32}p)\gamma_3 + M_3, \end{aligned}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, M_1, M_2, M_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — выходные и входные величины (углы и моменты); a_{ij}, c_{ij} — коэффициенты, определяемые через массы и геометрические размеры

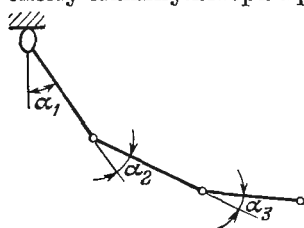


Рис. 8.7

звеньев манипулятора; f_1, f_2, f_3, k_{ij} — коэффициенты трения и упругой деформации.

Соответствующая этим уравнениям структурная схема с учетом всех динамических взаимосвязей между

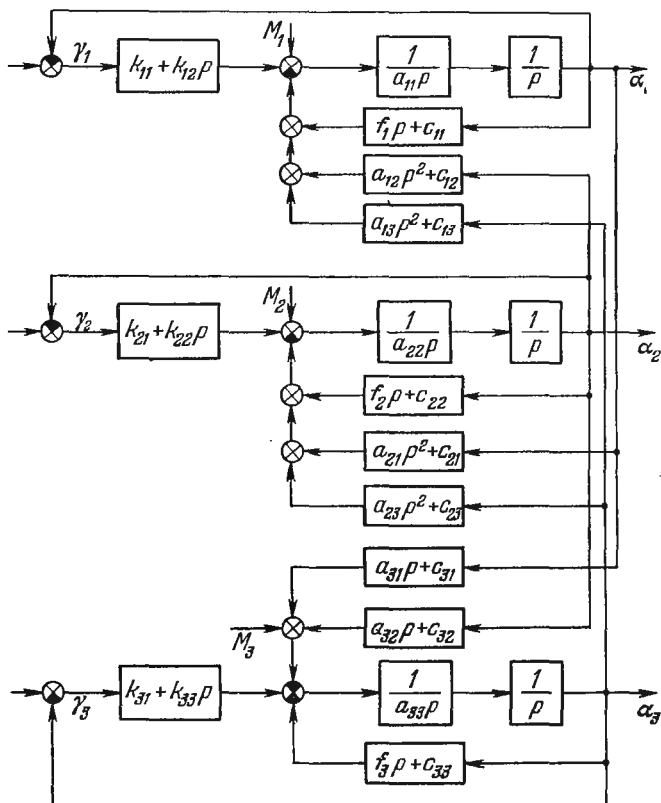


Рис. 8.8

движениями по трем степеням подвижности манипулятора приведена на рис. 8.8.

§ 8.2. Исследование многомерных систем

Выше были рассмотрены особенности представления дифференциальных уравнений многомерных систем автоматического управления в векторно-матричной форме.

Далее на базе этих уравнений можно осуществить прямой синтез системы, включая выбор корректирующих

устройств, задаваясь целесообразным расположением корней характеристического уравнения. Затем, опираясь на численные методы решения, можно осуществить анализ переходных процессов в многомерной системе с произвольным количеством и формой входных и выходных сигналов.

Методы прямого корневого синтеза, применяемые как к одномерным, так и — особенно — к многомерным системам, были изложены и проиллюстрированы примерами в главе 7. Там же описаны алгоритмы и программы численных расчетов при синтезе таких систем корневым методом с использованием пространства состояний, а в приложении дан текст программы этих расчетов на ЭВМ в общем виде и для конкретного примера.

Покажем еще другой подход к исследованию многомерных систем, связанный с так называемым методом обратных задач динамики [13]. Для простоты рассмотрим систему с тремя степенями свободы в случае, когда координаты вектора состояния системы совпадают с выходными (управляемыми) переменными. Более общие случаи изложены в указанной монографии.

Пусть уравнение динамики системы имеет вид

$$\ddot{\vartheta} = K\dot{\vartheta} + L\vartheta + Mu, \quad (8.4)$$

$$\vartheta(0) = \vartheta_0, \quad \dot{\vartheta}(0) = \dot{\vartheta}_0,$$

где

$$\vartheta = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}.$$

Выходными (управляемыми) величинами будем считать шесть следующих переменных:

$$x = [\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \dot{\vartheta}_3]^T,$$

образующих вектор состояния системы x .

Решим задачу синтеза законов управления u , обеспечивающих замкнутой системе астатизм первого порядка по всем трем координатам $x_1 = \vartheta_1$, $x_2 = \vartheta_2$, $x_3 = \vartheta_3$. Следовательно, при поступлении на вход системы постоянных задающих воздействий $g_1, g_2, g_3 = \text{const}$ должно выполняться условие отсутствия статических ошибок

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (g_i - x_i(t)) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8.5)$$

так как и скорости $\dot{x}_4 = \dot{\vartheta}_1$, $\dot{x}_5 = \dot{\vartheta}_2$, $\dot{x}_6 = \dot{\vartheta}_3$ в установившемся состоянии должны равняться нулю.

По данному методу следует ввести в данном случае три дополнительные координаты x_7, x_8, x_9 следующим образом:

$$\dot{x}_7 = g_1 - x_1, \quad \dot{x}_8 = g_2 - x_2, \quad \dot{x}_9 = g_3 - x_3. \quad (8.6)$$

Итак, уравнение расширенной таким образом системы будет содержать девятимерный вектор x_p и получит вид

$$\dot{x}_p = Ax_p + Bu + Dg, \quad (8.7)$$

где

$$x_p = [x_1, x_2, \dots, x_9]^T, \quad u = [u_1, u_2, u_3]^T, \quad g = [g_1, g_2, g_3]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O_1 \\ -Q & O_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ O_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} O_3 \\ Q \end{bmatrix},$$

причем

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{11} & k_{11} & l_{12} & k_{12} & l_{13} & k_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & k_{21} & l_{22} & k_{22} & l_{23} & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ l_{31} & k_{31} & l_{32} & k_{32} & l_{33} & k_{33} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

через O_1 обозначена нулевая матрица размером 6×3 , через O_2 — нулевая матрица 3×3 и через O_3 — нулевая матрица 6×6 . Начальные условия для расширенной системы (8.7) будут $x_p(0) = 0$.

Закон управления записывается в форме

$$u(x_p) = Cx_p = C_1x + C_2[x_7, x_8, x_9]^T,$$

где

$$C = [C_1 \vdots C_2], \quad C_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{16} \\ c_{21} & \cdots & c_{26} \\ c_{31} & \cdots & c_{36} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} c_{17} & c_{18} & c_{19} \\ c_{27} & c_{28} & c_{29} \\ c_{37} & c_{38} & c_{39} \end{bmatrix}.$$

Окончательно можно его переписать в виде

$$\mathbf{u}(\dot{\vartheta}, \dot{\vartheta}) = C_1 [\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \dot{\vartheta}_3, \dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \dot{\vartheta}_3]^T + C_2 \int (g - \dot{\vartheta}) dt. \quad (8.8)$$

Коэффициенты закона управления выбираются, исходя из желаемых динамических качеств синтезируемой системы [13]. Для этого необходимо привлечение расчетов на ЭВМ.

Структурная схема системы с законом управления (8.8) изображена на рис. 8.9 для векторного изображения переменных.

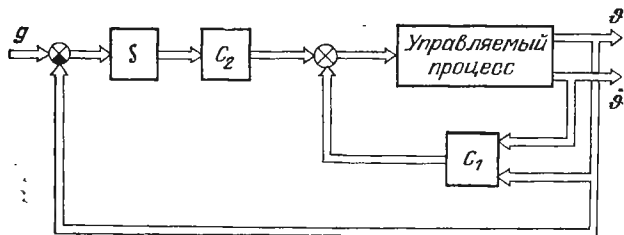


Рис. 8.9

Наконец изложим еще и другой подход к исследованию многомерных систем на базе передаточных функций и частотных характеристик.

Запишем в операторном виде уравнения динамики многомерной системы автоматического управления.

Если для одномерной линейной замкнутой системы уравнение динамики имеет вид

$$a(p)x = b(p)g + c(p)f, \quad p = \frac{d}{dt}$$

(a, b, c — операторные многочлены), то для многомерной линейной замкнутой системы получаем

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}(p)x_k = \sum_{k=1}^n b_{ik}(p)g_k + \sum_{r=1}^m c_{ir}(p)f_r \quad (8.9)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

где x_k, g_k ($k = 1, 2, \dots, n$) — регулируемые величины и задающие воздействия; f_r ($r = 1, 2, \dots, m$) — возмущающие воздействия; $a_{ik}(p), b_{ik}(p), c_{ir}(p)$ — операторные многочлены, в которых p — символ дифференцирования.

Можно записать передаточные функции замкнутой системы в отдельности для каждой регулируемой величины x_i по каждому внешнему воздействию g_k или f_r , а именно

$$\Phi_{ik}(s) = \frac{X_i(s)}{G_k(s)} \quad \text{или} \quad \Phi_{ir}^f(s) = \frac{X_i(s)}{F_r(s)}. \quad (8.10)$$

Совокупность всех этих передаточных функций можно выписать в виде одной передаточной матрицы. Относительно задающих воздействий имеем матрицу

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(s) & \Phi_{12}(s) & \dots & \Phi_{1n}(s) \\ \Phi_{21}(s) & \Phi_{22}(s) & \dots & \Phi_{2n}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{n1}(s) & \Phi_{n2}(s) & \dots & \Phi_{nn}(s) \end{bmatrix}. \quad (8.11)$$

Аналогичная матрица из m столбцов запишется и для передаточной матрицы $\Phi^f(s)$ по возмущающим воздействиям.

Итак, динамика многомерной системы, в отличие от одномерной, определяется либо сложной системой дифференциальных уравнений (8.9), либо передаточной матрицей $\Phi(s)$ вида (8.11) и аналогичной $\Phi^f(s)$.

Можно составить и весовую матрицу $K(t)$ или переходную матрицу $H(t)$, т. е. матрицы весовых или переходных функций, найденных для каждой x_i по каждому g_k . Например, чтобы получить весовую матрицу, нужно для каждой передаточной функции в матрице (8.11) пойти обратное преобразование Лапласа, а именно:

$$K(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} \Phi(s) e^{st} ds.$$

Покажем теперь, как на основании уравнений системы (8.9) определять передаточную матрицу (8.11).

Запишем систему уравнений (8.9) в матричной форме

$$A(p)x(t) = B(p)g(t) + C(p)f(t), \quad (8.12)$$

где

$$A(p) = \begin{bmatrix} a_{11}(p) & \dots & a_{1n}(p) \\ a_{21}(p) & \dots & a_{2n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(p) & \dots & a_{nn}(p) \end{bmatrix},$$

$$B(p) = \begin{bmatrix} b_{11}(p) & \dots & b_{1n}(p) \\ b_{21}(p) & \dots & b_{2n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(p) & \dots & b_{nn}(p) \end{bmatrix},$$

$$C(p) = \begin{bmatrix} c_{11}(p) & \dots & c_{1m}(p) \\ c_{21}(p) & \dots & c_{2m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}(p) & \dots & c_{nm}(p) \end{bmatrix},$$

а переменные

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{bmatrix}.$$

Применение преобразования Лапласа к уравнению (8.12) при нулевых начальных условиях дает

$$A(s)X(s) = B(s)G(s) + C(s)F(s),$$

откуда

$$X(s) = A^{-1}(s)B(s)G(s) + A^{-1}(s)C(s)F(s).$$

Следовательно, передаточная матрица $\Phi(s)$ для регулируемых величин по задающим воздействиям представляется в виде

$$\Phi(s) = A^{-1}(s)B(s) = \frac{1}{|A(s)|} \tilde{A}(s)B(s), \quad (8.13)$$

где через

$$\tilde{A}(s) = [A_{ik}]^T$$

обозначена присоединенная матрица, причем A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} матрицы $A(s)$.

Аналогично можно определить и передаточную матрицу $\Phi^f(s)$ для регулируемых величин по возмущающим воздействиям.

Приведем пример системы с двумя регулируемыми величинами. Заданы уравнения динамики

$$\begin{aligned} a_{11}(p)x_1 + a_{12}(p)x_2 &= \\ &= b_{11}(p)g_1 + b_{12}(p)g_2 + c_{11}(p)f_1 + c_{12}(p)f_2, \\ a_{21}(p)x_1 + a_{22}(p)x_2 &= \\ &= b_{21}(p)g_1 + b_{22}(p)g_2 + c_{21}(p)f_1 + c_{22}(p)f_2. \end{aligned}$$

Здесь

$$A(s) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B(s) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad C(s) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Алгебраические дополнения элементов матрицы A будут

$$A_{11} = a_{22}, \quad A_{12} = a_{21}, \quad A_{21} = -a_{12}, \quad A_{22} = a_{11};$$

присоединенная матрица

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix};$$

произведение матриц

$$\tilde{A}B = \begin{bmatrix} a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} & a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22} \\ -a_{21}b_{11} + a_{11}b_{21} & -a_{21}b_{12} + a_{11}b_{22} \end{bmatrix},$$

определитель матрицы

$$|A(s)| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

В результате получим передаточную матрицу данной системы

$$\Phi(s) = \frac{1}{|A(s)|} \tilde{A}(s) B(s) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(s) & \varphi_{12}(s) \\ \varphi_{21}(s) & \varphi_{22}(s) \end{bmatrix},$$

где

$$\varphi_{11}(s) = \frac{a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

(передаточная функция для регулируемой величины x_1 по задающему воздействию g_1),

$$\varphi_{12}(s) = \frac{a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

(передаточная функция для регулируемой величины x_1 по задающему воздействию g_2) и т. д.

Далее на базе этих передаточных матриц можно исследовать точность, устойчивость и качество процессов управления, синтезировать корректирующие устройства. Для этого разработаны различные специальные частотные методы с применением структурных преобразований, позволяющих переходить к упрощенным эквивалентным схемам. В некоторых случаях удастся разбить общую систему на ряд более простых (декомпозиция) и судить о поведении системы в целом по совокупности свойств ее частей.

Чаще всего многомерную систему представляют как совокупность отдельных (сепаратных) систем или каналов. Каждая из сепаратных систем (каналов) имеет одну регулируемую величину и один регулятор, между которыми имеются взаимосвязи, называемые перекрестными связями. Эти перекрестные связи могут содержаться либо в структуре самого объекта, либо в схемах регуляторов.

Например, при управлении движением самолета можно рассматривать сепаратные каналы курса и крена, которые взаимосвязаны (см. рис. 8.5). Перекрестные связи имеются в самом объекте, обусловленные его аэродинамическими свойствами, а также в автопилоте, где они искусственно вводятся, например, для координированного разворота.

Наглядным примером многомерного объекта может служить, как отмечалось выше, система управления электродвигателями, взаимосвязанными через механическую систему (рис. 8.6).

Манипулятор промышленного робота как управляемый объект имеет несколько степеней подвижности (см. рис. 8.7 и 8.8). Эту сложную многомерную систему можно рассматривать как совокупность нескольких сепаратных систем (систем управления отдельными приводами относительно каждой степени подвижности), между которыми существуют перекрестные связи, обусловленные уравнениями динамики движения многозвенной механической цепи манипулятора. Наконец, могут вводиться также корректирующие перекрестные связи между каналами управления отдельных приводов для улучшения качества процессов управления и, если нужно, для развязки каналов, т. е. ликвидации взаимозависимости дви-

жения приводов по разным степеням подвижности манипулятора.

Рассмотрим многомерную систему, структурная схема которой представлена на рис. 8.10. К такому виду можно привести, например, систему манипулятора промышленного робота, показанную на рис. 8.8. Здесь двойными линиями обозначены векторные многомерные сигналы, а $W_a(s)$, $W_b(s)$, $W_c(s)$ — матрицы передаточных функций.

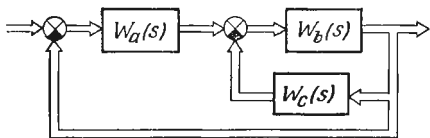


Рис. 8.10

Запишем матрицу передаточных функций разомкнутой системы размерностью $n \times n$:

$$W(s) = X^{-1}(s) W_a(s), \quad (8.14)$$

где

$$X(s) = W_b^{-1}(s) + W_c(s) + W_a(s) \beta.$$

Система состоит из n отдельных каналов управления (например, на рис. 8.8 их три), связанных между собой перекрестными связями, содержащимися в объекте управления (в данном примере — в манипуляторе). Передаточная функция i -й отдельной разомкнутой системы соответствует i -му диагональному элементу матрицы (8.14), а остальные элементы матрицы (8.14) характеризуют взаимовлияние каналов управления друг на друга. При этом множитель β представляет собой диагональную матрицу $[1 \dots 1 0 1 \dots 1]$, где для каждой i -й отдельной системы ставится 0 на месте i -го диагонального элемента.

Исследование частотных характеристик $W(j\omega)$ показывает [19], что весь диапазон частот $0 < \omega < \infty$ можно разбить на три области:

- 1) $0 < \omega < \omega_2$,
- 2) $\omega_2 < \omega < \omega_3$,
- 3) $\omega_3 < \omega < \infty$.

В нижней области частот $0 < \omega < \omega_2$ наличие перекрестных связей не оказывает существенного влияния на частотные характеристики отдельных систем. В средней области частот $\omega_2 < \omega < \omega_3$ наблюдается существенное влияние всех компонентов матрицы частотных характеристик. В верхней области частот $\omega_3 < \omega < \infty$ проявляются известные высокочастотные асимптоты частотных

характеристик следящих систем манипулятора. При этом здесь доминирующее значение получают составляющие, обусловленные ускорениями относительных координат звеньев.

Таким образом, основной задачей является определение граничной частоты ω_2 , до которой расчет каналов управления манипулятора можно производить без учета их взаимосвязей.

Вводится критерий, позволяющий определить значимость влияния недиагональных элементов матрицы $X(j\omega)$ на формирование диагональных элементов матрицы $X^{-1}(j\omega)$, в виде

$$\delta_i(\omega) = 1 - |\Delta_i(j\omega)|,$$

где

$$\Delta_i(j\omega) = \hat{x}_{ii}(j\omega) x_{ii}(j\omega),$$

причем $\hat{x}_{ii}(j\omega)$ — диагональные элементы матрицы $X^{-1}(j\omega)$, а $x_{ii}(j\omega)$ — диагональные элементы матрицы $X(j\omega)$.

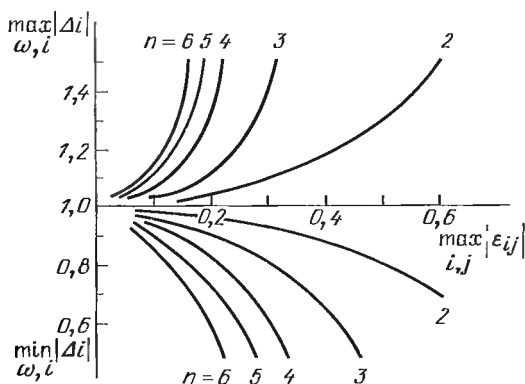


Рис. 8.11

Если $\delta_i(\omega)$ близко к нулю по сравнению с 1, то перекрестные воздействия в системе оказываются несущественными.

Введем соотношения между диагональными и недиагональными элементами матрицы $X(j\omega)$. Относительное значение каждого недиагонального элемента будет

$$\epsilon_{ik}(j\omega) = x_{ik} [x_{ii}(j\omega) x_{kk}(j\omega)]^{-1/2}.$$

Для максимального и минимального значений Δ_i в зависимости от числа n и максимального значения $|\epsilon_{ik}|$ составлены графики (рис. 8.11). Они служат для прибли-

женного определения граничной частоты ω_2 . Тут применяется графический метод сложения и вычитания логарифмических амплитудно-частотных характеристик сепаратных систем и перекрестных связей. Среди них отыскиваются те, которые имеют наибольшие по модулю значения.

Указанные графические построения для определения граничной частоты ω_2 проиллюстрированы на рис. 8.12.

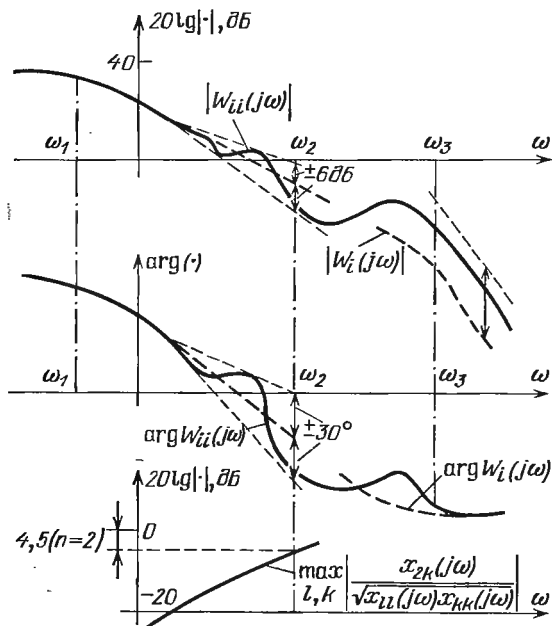


Рис. 8.12

где фигурируют частотные характеристики для i -й сепаратной системы

$$W_{ii}^*(j\omega) = x_{ii}^{-1} W_{ai}(j\omega)$$

и

$$W_{ii}(j\omega) = W_i(j\omega) \Delta_i(j\omega).$$

На этом графике показана еще не упоминавшаяся здесь частота ω_1 , определяющая в нижнем диапазоне частот $0 < \omega < \omega_2$ ту часть $0 < \omega < \omega_1$, где возможно упрощенное построение частотной характеристики.

Положение граничной частоты ω_2 характеризует степень влияния перекрестных связей. Так, если ω_2 ока-

жется меньше или близкой одной из частот среза сепаратных систем, то влияние перекрестных связей таково, что по динамическим свойствам сепаратных систем нельзя судить о динамике системы. Необходимо провести полный расчет частотных характеристик с учетом всех элементов матрицы $X(j\omega)$. Если же частота ω_2 будет больше частоты среза каждой из сепаратных систем, то при анализе системы в первом приближении можно пренебречь влиянием перекрестных связей.

В первом случае, когда наблюдается сильное влияние перекрестных связей в районе частот среза сепаратных систем, эти связи будут существенно сказываться на устойчивости системы в целом (при устойчивых сепаратных системах), в том числе и в сторону нарушения устойчивости. Поэтому для данного случая разработан специальный метод исследования устойчивости системы [49].

Изложим другой частотный метод анализа устойчивости многомерных систем *).

Аналогично тому, как определялась матрица передаточных функций *замкнутой* многомерной системы (8.6), можно находить и матрицу передаточных функций *разомкнутой* многомерной системы:

$$W(s) = \begin{bmatrix} w_{11}(s) & w_{12}(s) & \dots & w_{1n}(s) \\ w_{21}(s) & w_{22}(s) & \dots & w_{2n}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1}(s) & w_{n2}(s) & \dots & w_{nn}(s) \end{bmatrix}, \quad (8.15)$$

где элементы $w_{ii}(s)$ главной диагонали матрицы $W(s)$ представляют собой передаточные функции сепаратных каналов системы, а недиагональные элементы w_{ij} ($j \neq i$) — передаточные функции перекрестных связей между каналами.

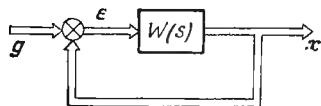


Рис. 8.13

При этом аналогично обычным одномерным системам можно общую схему многомерной системы представить в виде

рис. 8.13, где обозначены векторы входных величин g , ошибки ε и выходных величин x , а двойные линии соответствуют прохождению соответствующего комплекса воздействий. Так же как и в одномерном случае,

*) По материалам, предоставленным автору О. Н. Гаспаряном.

здесь можно преобразовать к виду рис. 8.13 любую многомерную систему автоматического управления на основании правил преобразования матричных структурных схем.

Матрицы передаточных функций замкнутой многомерной системы связаны с разомкнутой (8.15) следующими соотношениями: для выходных величин

$$\Phi(s) = [E + W(s)]^{-1} W(s), \quad (8.16)$$

а для ошибок

$$\Phi_\varepsilon(s) = [E + W(s)]^{-1}, \quad (8.17)$$

где E — единичная матрица. В изображениях по Лапласу векторы выходных величин x и ошибок ε определяются матричными уравнениями

$$X(s) = \Phi(s) G(s), \quad E(s) = \Phi_\varepsilon(s) G(s).$$

Координаты векторов $X(s)$, $G(s)$, $E(s)$ представляют собой преобразованные по Лапласу реальные сигналы выходов, входов и ошибок.

Известными в математике методами можно найти собственные значения $q_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) матрицы $W(s)$. Значения $q_i(s)$ тоже будут функциями комплексного переменного. Они получают дробно-рациональный вид, аналогичный обычным передаточным функциям одномерных разомкнутых систем. В связи с этим функции $q_i(s)$ называются *характеристическими передаточными функциями* многомерной разомкнутой системы. Будем полагать, что все эти собственные значения $q_i(s)$ различны, что на практике обычно имеет место.

Доказано, что характеристическое уравнение замкнутой многомерной системы [см. (8.16) и (8.17)] представляется в виде

$$\det [E + W(s)] = \sum_{i=1}^n (1 + q_i(s)), \quad (8.18)$$

т. е. характеристическое уравнение замкнутой n -мерной системы распадается на n характеристических уравнений воображаемых замкнутых одномерных систем

$$1 + q_i(s) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.19)$$

соответствующих собственным значениям $q_i(s)$ матрицы передаточных функций разомкнутой многомерной системы $W(s)$.

На данной основе можно представить себе для этого ряда воображаемых замкнутых одномерных систем их обычные передаточные функции, называемые также характеристическими:

$$\Phi_i(s) = \frac{q_i(s)}{1 + q_i(s)}, \quad \Phi_{\varepsilon i}(s) = \frac{1}{1 + q_i(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, комплексная плоскость корней характеристического уравнения замкнутой многомерной системы (8.18) представляет собой наложение n комплексных плоскостей корней характеристических уравнений полученных воображаемых замкнутых систем.

Поэтому для устойчивости замкнутой линейной многомерной системы необходимо и достаточно, чтобы были устойчивы все эти воображаемые замкнутые системы. Основным достоинством данного метода является то, что исследование устойчивости сложной замкнутой многомерной системы сводится к определению устойчивости n обычных одномерных систем (8.19) — строго без всяких приближений.

В принципе здесь можно применить любой из известных критериев устойчивости, но удобнее всего использовать обычный частотный критерий Найквиста (см. § 4.4). В этом случае делается подстановка $s = j\omega$, вследствие чего матрица $W(s)$ переходит в числовую матрицу $W(j\omega)$ с комплексными элементами. При фиксированных значениях ω нахождение собственных значений $q_i(j\omega)$

такой матрицы производится уже известными приемами. В частности, имеются стандартные пакеты программ вычисления на ЭВМ собственных значений комплексных матриц.

Например, для устойчивой многомерной системы третьего порядка в случае устойчивости разомкнутой цепи годографы характеристических функций $q_i(j\omega)$ ($i = 1, 2, 3$) могут иметь вид, показанный примерно на рис. 8.14. Аналогично обыч-

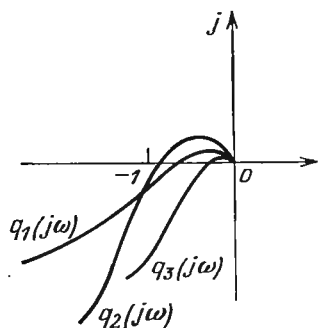


Рис. 8.14

ным критериям Найквиста определяется устойчивость многомерной системы и в случаях нейтральной или неустойчивой разомкнутой цепи.

Важно подчеркнуть следующее. Нельзя в общем случае судить об устойчивости многомерной системы в целом по устойчивости сепаратных ее каналов. Обязательно надо прибегать к определению характеристических

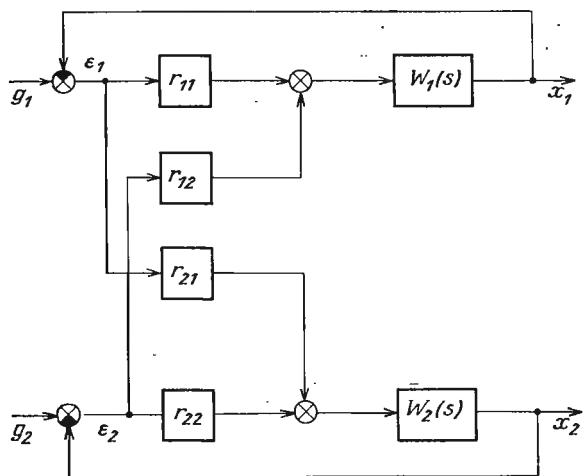


Рис. 8.15

передаточных функций $q_i(s)$. Покажем это на простом примере.

Пусть имеется двумерная система, структурная схема которой показана на рис. 8.15, где

$$W_1(s) = \frac{2,5}{s(1,2s + 1)(0,05s + 1)}, \quad W_2(s) = \frac{4}{s(1,5s + 1)},$$

а величины r_{ij} являются коэффициентами жестких взаимных связей.

Характеристические функции $q_1(s)$ и $q_2(s)$ такой многомерной системы, вычисленные описанным выше способом с подстановкой $s = j\omega$, имеют вид

$$q_{1,2}(j\omega) = \frac{r_{11}W_1(j\omega) + r_{22}W_2(j\omega)}{2} \pm \sqrt{\frac{[r_{11}W_1(j\omega) + r_{22}W_2(j\omega)]^2}{4} - W_1(j\omega)W_2(j\omega)(r_{11}r_{22} - r_{21}r_{12})}.$$

При некоторых значениях коэффициентов r_{ij} годографы для сепаратных систем $W_1(j\omega)$ и $W_2(j\omega)$ (рис. 8.16) идут благоприятным образом (не охватывая точки -1).

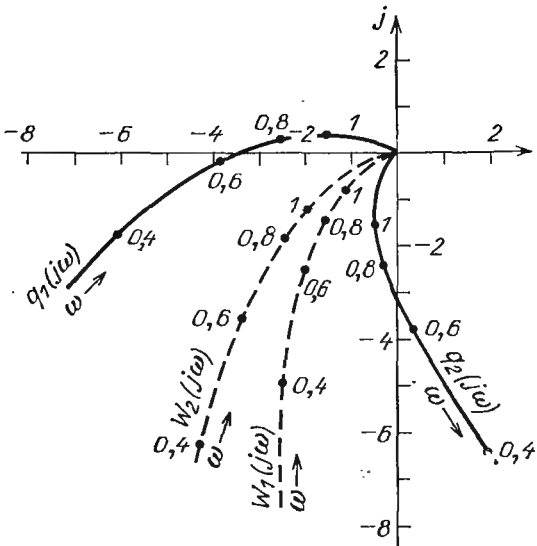


Рис. 8.16

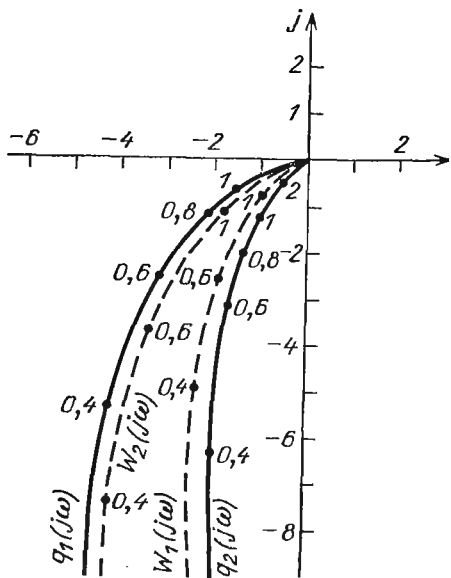


Рис. 8.17

Однако годографы характеристических функций $q_1(j\omega)$ и $q_2(j\omega)$ говорят о неустойчивости многомерной системы в целом, так как $q_1(j\omega)$ охватывает точку -1 . При других же значениях коэффициентов r_{ij} (рис. 8.17) данная многомерная система устойчива.

В заключение заметим, что описанный метод исследования устойчивости многомерной системы справедлив в том случае, когда система является управляемой и наблюдаемой; понятия об этом даются в следующем параграфе.

§ 8.4. Понятие управляемости и наблюдаемости систем

Рассмотрим линейную систему, динамика которой описывается дифференциальными уравнениями n -го порядка. Тогда состояние системы будет определяться n координатами x_i ($i = 1, \dots, n$). Эти координаты состояния системы, как отмечалось в § 2.3, не обязательно будут совпадать с физическими величинами, в том числе и с выходными величинами систем. Поэтому в общем случае надо ввести отдельные обозначения для выходных управляемых величин $y_1, y_2, \dots, y_q$ и записать их выражения через x_i . Входные управляющие величины системы обозначим через $u_1, u_2, \dots, u_m$ (рис. 8.18).

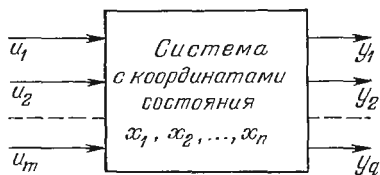


Рис. 8.18

В качестве системы на рис. 8.18 может рассматриваться система автоматического управления (тогда $u_1, u_2, \dots, u_m$ будут играть роль внешних задающих воздействий $g_1, g_2, \dots, g_m$) либо сложный управляемый объект (тогда $u_1, u_2, \dots, u_m$ будут управляющими воздействиями со стороны регуляторов).

Уравнения динамики линейной системы в векторно-матричной форме можно представить следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (8.20)$$

$$y = Cx,$$

где обозначены вектор координат состояния системы, векторы управления и наблюдения (измерения) на

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_q \end{bmatrix}$$

и введены матрицы коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{q1} & \dots & c_{qn} \end{bmatrix}.$$

В общей теории систем вводятся понятия управляемости и наблюдаемости. Здесь мы приведем лишь основные понятия прикладного плана без изложения математической теории.

Управляемостью системы называется такое ее свойство, что под действием некоторого управления $\mathbf{u}(t)$ в течение конечного отрезка времени ее можно перевести из любого начального состояния $\mathbf{x}_0$ в конечное $\mathbf{x}_1$. В этом случае система называется *полностью управляемой*.

Если же этим свойством система обладает не по всем координатам, то она будет *неполностью управляемой*. Могут быть и полностью *неуправляемые* системы.

Существует теорема Калмана, приводимая здесь без доказательства, на основании которой можно судить об управляемости системы.

Составим матрицу G размером $n \times nm$ следующего вида

$$G = [B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B]. \quad (8.21)$$

Далее требуется определить *ранг* этой матрицы. Напомним, что с этой целью рассматриваются миноры матрицы. Если какой-нибудь из миноров порядка r не равен нулю, а все миноры более высокого порядка равны нулю, то число r и будет являться рангом этой матрицы.

Система будет управляемой полностью, если ранг r матрицы G (8.21) равен n . Если $r=0$ — система полностью неуправляемая.

Если ранг матрицы $r < n$, то система будет неполностью управляемой. Тогда можно выделить часть системы порядка r , которая будет управляемой, а остальная часть неуправляемой.

В том случае, когда исследуется система с одним входным управляющим воздействием u , т. е. когда $m = 1$, матрица G (согласно (8.21)) будет квадратной $n \times n$. Для полной управляемости системы в этом случае требуется, чтобы определитель матрицы G не равнялся нулю (т. е. чтобы она была невырожденной), так как именно тогда ранг матрицы $r = n$.

Приведем простейшие примеры определения управляемости системы.

1. Система описывается уравнением

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + u.\end{aligned}$$

В этом примере имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, согласно (8.21)

$$G = [B \ : \ AB], \quad \det G = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

данная система полностью управляема.

2. Система имеет вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + u, \quad \frac{dx_2}{dt} = 0.$$

Здесь имеем

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Получаем

$$\det G = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

а значит, система не будет управляемой. Ранг этой матрицы $r = 1$, т. е. $r < n$.

3. Задана система с двумя входами:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - u_1 + u_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_2 + 2u_2.$$

В этой системе

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$G = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ранг этой матрицы $r=2$. Система полностью управляема.

Приведем еще один интересный пример, рассматриваемый в книге [7]. При двух управляющих воздействиях изображенная система (рис. 8.19, а), как можно показать, является полностью управляемой. Если же ввести

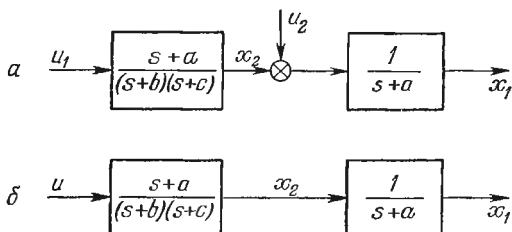


Рис. 8.19

только одно управление $u_1 = u$ (рис. 8.19, б), то система уже не будет полностью управляемой. В самом деле, уравнения системы

$$(p+a)x_1 = x_2, \quad (p+b)(p+c)x_2 = (p+a)u$$

можно привести к нормальной форме

$$\frac{dx_1}{dt} = -ax_1 + x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -bx_2 + (a-c)x_3 + u, \quad (8.22)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -cx_3 + u.$$

Сравнивая это уравнение с общим выражением (8.20), имеем

$$A = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ 0 & -b & a-c \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 1 \\ a-b-c \\ -c \end{bmatrix}.$$

далее получаем

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & -(a+b) & a-c \\ 0 & b^2 & -(a-c)(b-c) \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix},$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} -b-c \\ b^2 - (a-c)(b+c) \\ c^2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда согласно (8.21) матрица G будет

$$G = [B : AB : A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -(b+c) \\ 1 & a-b-c & b^2 - (a-c)(b-c) \\ 1 & -c & c^2 \end{bmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен нулю, но существуют миноры второго порядка, не равные нулю. Следовательно, ранг матрицы $r=2$, т. е. $r < n$. Система не полностью управляема. В ней можно выделить управляемую часть, которая имеет второй порядок.

Однако если блоки на рис. 8.19, б поменять местами (рис. 8.20), то система станет полностью управляемой.

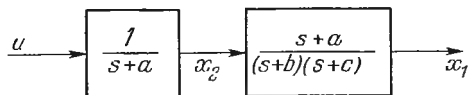


Рис. 8.20

В этом легко убедиться, проделав аналогичные выкладки, имея в виду, что теперь уравнения системы в нормальной форме примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -bx_1 + (a-c)x_3 + u, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -ax_2 + u, \\ \frac{dx_3}{dt} &= -cx_3 + u, \end{aligned} \quad (8.23)$$

где, в отличие от (8.22), управление u вошло во все три уравнения.

Перейдем теперь к понятию наблюдаемости системы.

Непосредственно наблюдаемыми величинами являются выходные величины y (рис. 8.18), которые можно измерять.

Наблюдаемостью системы называется такое ее свойство, когда путем наблюдения (измерения) ее выходных величин $y(t)$ на конечном интервале времени можно определить все координаты состояния системы. В этом случае система будет *полностью наблюдаемой*.

Система будет *неполностью наблюдаемой*, если через измеренные выходные величины определяются не все координаты состояния системы.

Пусть уравнения системы заданы в векторно-матричной форме (8.20).

Составим, следуя Калману, матрицу размером $n \times nq$ в виде

$$H = [C^T \ ; \ A^T C^T \ ; \ (A^T)^2 C^T \ ; \ \dots \ ; \ (A^T)^{n-1} C^T], \quad (8.24)$$

где A^T и C^T — транспонированные матрицы.

Система будет полностью наблюдаемой, если ранг матрицы H равен n . Если же ее ранг $r < n$, то система неполностью наблюдаема. Наблюдаемая часть системы будет иметь порядок r .

В том случае, когда имеется одна измеряемая выходная величина y , матрица C имеет одну строку, а C^T соответственно один столбец. При этом матрица H будет иметь размер $n \times n$ и для полной наблюдаемости системы потребуется, чтобы матрица H была невырожденной.

Приведем простейшие примеры.

1. Система описывается уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u, \quad y = x_1.$$

Здесь имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad A^T C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда согласно (8.24) матрица H получает вид

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ранг ее равен двум. Следовательно, данная система полностью наблюдаема. Действительно, если измерена x_1 , то по первому уравнению системы определяется и x_2 .

2. Система задана уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u, \quad y = x_2.$$

Теперь изменилась только $C = [0 \ 1]$. Следовательно,

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^T C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det H = 0.$$

Система не является полностью наблюдаемой. Действительно, здесь измеряется величина x_2 , т. е. скорость изменения величины x_1 . Поэтому значение самой величины x_1 остается неопределенным.

Интересно отметить, что, например, система, показанная на рис. 8.19, б (которая была неполностью управляемой), оказывается (если написать для нее матрицу H) полностью наблюдаемой, когда измеряется только координата x_1 , т. е. когда $C = [1 \ 0 \ 0]$. И наоборот, в этом случае другая система (рис. 8.20) не полностью наблюдаема, хотя она является полностью управляемой [7].

Из приведенного примера видно, что с точки зрения управляемости и наблюдаемости нельзя в передаточных функциях сокращать одинаковые сомножители (здесь например, $s + a$) и переставлять сомножители местами.

Понятия управляемости и наблюдаемости имеют важное значение для теории оптимальных систем. Но они полезны и вообще для получения более полного представления о свойствах исследуемой или проектируемой системы.

§ 8.5. Оценивание координат состояния систем

Обычно в технических системах не возникает необходимости в наблюдении и управлении для всех n координат состояния системы, тем более, что часть из них может не соответствовать физически реальным величинам. Однако в случае необходимости можно вводить в систему автоматического управления корректирующий сигнал от какой-либо координаты состояния x_i , которая не измеряется как физическая.

Для этого служит косвенная оценка неизмеряемых координат состояния системы путем введения так называемого «наблюдателя» по Калману. Метод оценки вектора состояния дает возможность «восстановить» неизме-

римые координаты вектора состояния в виде $\hat{\mathbf{x}} \approx \mathbf{x}$ и использовать «восстановленный» вектор состояния системы для решения задачи, например, модального синтеза в пространстве состояний (см. главу 7). Схема оценивания координат состояния реализуется в виде дополнительной динамической аналоговой модели — *наблюдателя*.

Проиллюстрируем алгоритм наблюдателя Калмана для непрерывных измерений.

Запишем в векторно-матричной форме уравнения объекта управления

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (8.25)$$

и управляющие сигналы

$$\mathbf{u} = -M\hat{\mathbf{x}} + F\mathbf{g}, \quad (8.26)$$

где A , B , M , F — матрицы коэффициентов.

Измерение выходных координат системы имеется в виде

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x}.$$

Оценка координат состояния системы наблюдателем формируется следующим образом:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} - BM\hat{\mathbf{x}} + P(\mathbf{y} - C\mathbf{x}) + BF\mathbf{g}, \quad (8.27)$$

где P — тоже матрица коэффициентов.

Рассматривая совместно уравнения (8.25), (8.26) и (8.27), получим

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} - BM\hat{\mathbf{x}} + BF\mathbf{g}, \quad (8.28)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = PC\mathbf{x} + (A - BM - PC)\hat{\mathbf{x}} + BF\mathbf{g}, \quad (8.29)$$

что в векторно-матричной форме запишется так

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BM \\ PC & A - BM - PC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BF \\ BF \end{bmatrix} \mathbf{g}.$$

Из написанных уравнений видно, что при использовании наблюдателя порядок всей системы увеличивается до $2n$, тогда как n — число координат, которые можно использовать для управления системой, сохраняется.

Характеристическое уравнение системы с наблюдателем будет иметь вид

$$D(\lambda) = \left| \begin{array}{c|c} \lambda E - A & BM \\ \hline -PC & \lambda E - A + BM + PC \end{array} \right| = 0, \quad (8.30)$$

где E — единичная матрица.

Для оценки точности работы наблюдателя перейдем к новым координатам в виде $\Delta x = x - \hat{x}$. Вычитая (8.29) из (8.28), получим

$$\dot{\Delta x} = Ax - CPx - (A - CP)\hat{x} = A[x - \hat{x}] - CP[x - \hat{x}].$$

Следовательно,

$$\dot{\Delta x} = (A - CP)\Delta x. \quad (8.31)$$

Из уравнения (8.28), заменяя $\hat{x} = x - \Delta x$, при отсутствии внешнего воздействия g будем иметь

$$\dot{\hat{x}} = Ax - BM[x - \Delta x]$$

или

$$\dot{\hat{x}} = (A - BM)x + BM\Delta x. \quad (8.32)$$

Уравнения (8.32) и (8.31) в векторно-матричной форме для свободного движения системы запишутся в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\Delta x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BM & BM \\ 0 & A - CP \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \Delta x \end{bmatrix}. \quad (8.33)$$

Характеристическое уравнение для этой системы будет

$$D(\lambda) = \left| \begin{array}{c|c} \lambda E - (A - BM) & BM \\ \hline 0 & \lambda E - (A - CP) \end{array} \right| = 0.$$

Оно принимает вид

$$D(\lambda) = |\lambda E - A + BM| |\lambda E - A + CP| = 0,$$

т. е. распадается на два уравнения

$$D'(\lambda) = |\lambda E - A + BM| = 0, \quad (8.34)$$

$$D''(\lambda) = |\lambda E - A + CP| = 0. \quad (8.35)$$

Последнее обстоятельство дает возможность независимого модального синтеза как основной системы с координатами вектора x по уравнению (8.34), так и системы определения погрешности Δx по уравнению (8.35). Требуется, чтобы погрешность наблюдения $\Delta x(t)$ быстро затухала во времени.

Существуют и другие схемы наблюдателей, каждый из которых обладает своими особенностями.

Для иллюстрации возможностей и особенности изложенной методики рассмотрим пример расчета следящей системы с наблюдателем, представленной на рис. 8.24.

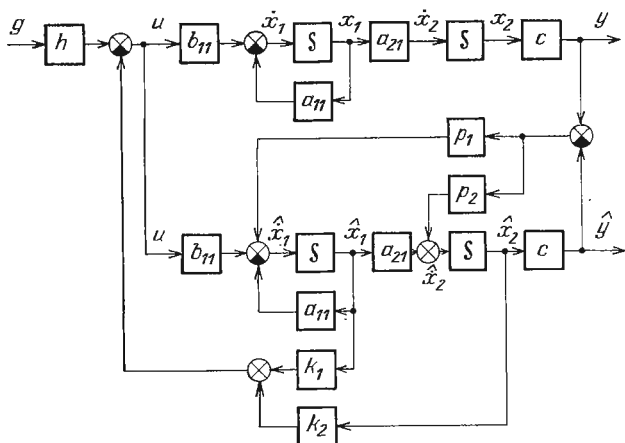


Рис. 8.24

По этой схеме составим уравнения состояний данной следящей системы с наблюдателем Калмана. Получим

$$\dot{x}_1 = -a_{11}x_1 - b_{11}k_1\hat{x}_1 - b_{11}k_2\hat{x}_2 + b_{11}hg,$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1,$$

$$\dot{\hat{x}}_1 = cp_1x_2 - (a_{11} + k_1b_{11})\hat{x}_1 - (k_2b_{11} + cp_1)\hat{x}_2 + b_{11}hg,$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = cp_2x_2 + a_{21}\hat{x}_1 - cp_2\hat{x}_2,$$

что в векторно-матричной форме запишется так

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & 0 & -b_{11}k_1 & -b_{11}k_2 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & cp_1 & -(a_{11} + k_1b_{11}) & -(k_2b_{11} + cp_1) \\ 0 & cp_2 & a_{21} & -cp_2 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}h \\ 0 \\ b_{11}h \\ 0 \end{bmatrix} g.$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет иметь вид

$$D(\lambda) = \left| \begin{array}{cc|cc} \lambda + a_{11} & 0 & b_{11}k_1 & b_{11}k_2 \\ -a_{21} & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & -cp_1 & \lambda + a_{11} + k_1b_{11} & k_2b_{11} + cp_1 \\ 0 & -cp_2 & -a_{21} & \lambda + cp_2 \end{array} \right| = 0.$$

По известным правилам оно может быть приведено к нормальной форме.

Перейдем от координат наблюдателя $\widehat{x}_1$ и $\widehat{x}_2$ к координатам ошибок наблюдения $\Delta x_1 = x_1 - \widehat{x}_1$ и $\Delta x_2 = x_2 - \widehat{x}_2$.

После подстановки $\widehat{x}_1 = x_1 - \Delta x_1$ и $\widehat{x}_2 = x_2 - \Delta x_2$ в уравнение состояния системы и соответствующих преобразований, получим уравнение системы с наблюдателем

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\Delta x}_1 \\ \dot{\Delta x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a_{11} + b_{11}k_1) & -b_{11}k_2 & b_{11}k_1 & b_{11}k_2 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -a_{11} & -cp_1 \\ 0 & 0 & a_{21} & -cp_2 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} g$$

и соответствующее ему характеристическое уравнение, которое после раскрытия определителя запишется в виде

$$D(\lambda) = [(\lambda + a_{11} + b_{11}k_1)\lambda + a_{21}b_{11}k_2] \times \\ \times [(\lambda + a_{11})(\lambda + cp_2) + a_{21}cp_1] = 0.$$

Последнее уравнение распадается на характеристическое уравнение собственно системы

$$D'(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(a_{11} + b_{11}k_1) + a_{21}b_{11}k_2 = 0$$

и уравнение ошибки наблюдателя

$$D''(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(a_{11} + cp_2) + (a_{11}cp_2 + a_{21}cp_1) = 0,$$

которые независимы и могут быть синтезированы свободным выбором параметров k_1 , k_2 и соответственно p_1 и p_2 (см. рис. 8.24).

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ДРУГИХ ТИПОВ

§ 9.1. Системы с запаздыванием

В отличие от систем, рассматривавшихся в предыдущих главах, системой с запаздыванием называется такая система, в которой имеется звено, обладающее тем свойством, что реакция его на выходе отстает по времени на некоторую величину τ .

Например, апериодическое звено с запаздыванием, вместо обычного

$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = kx_1,$$

будет описываться уравнением

$$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = kx_1(t - \tau) \quad (9.1)$$

— уравнением с запаздывающим аргументом.

Это значит, что реакция звена, например, на единичный скачок (т. е. переходная функция) вместо обычной (рис. 9.1, б) будет иметь вид, изображенный на рис. 9.1, в.

Уравнение (9.1) можно разбить на два, введя промежуточную переменную x_2^* , а именно:

$$T \frac{dx_2^*}{dt} + x_2^* = kx_1, \quad (9.2)$$

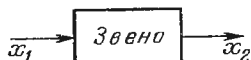
$$x_2(t) = x_2^*(t - \tau). \quad (9.3)$$

Тогда структурно наше звено с запаздыванием разделится на два (рис. 9.1, г): *обыкновенное звено* и *элемент запаздывания*, описываемый уравнением (9.3).

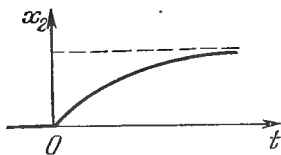
Будем рассматривать только такие системы, у которых во всех процессах величина запаздывания τ остается постоянной, хотя существует теория и для изменяющегося τ .

Примерами звеньев с запаздыванием могут служить: акустическая линия связи (τ — время прохождения звука

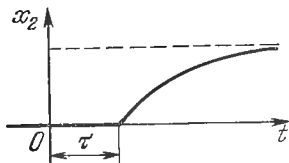
в среде); радиотелевизионная связь Земля — Луна в системе телеуправления, например, луноходом; дозирование вещества с перемещением его на ленточном транспорте (τ — время движения между определенными точками);



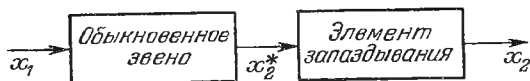
а



б



в



г

Рис. 9.1

измерение толщины проката на определенном расстоянии от регулируемых валков.

Запишем передаточную функцию элемента запаздывания (9.3). По определению, это есть отношение изображений по Лапласу выходной и входной величин при нулевых начальных условиях. Применяя теорему запаздывания операционного исчисления, для уравнения (9.3) получаем передаточную функцию

$$W_{\tau}(s) = e^{-\tau s}. \quad (9.4)$$

Тогда, если элемент запаздывания находится в прямой цепи системы (рис. 9.2, а) и не охватывается местной обратной связью, если она имеется (рис. 9.2, б), то общая передаточная функция разомкнутой цепи получает вид

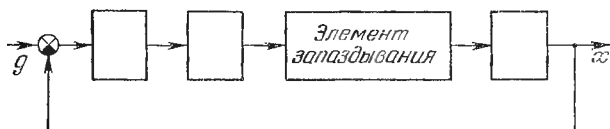
$$W(s) = W_0(s) e^{-\tau s} = \frac{KN(s)}{L(s)} e^{-\tau s}, \quad (9.5)$$

где $W_0(s)$ — общая передаточная функция всех остальных звеньев цепи, кроме элемента запаздывания.

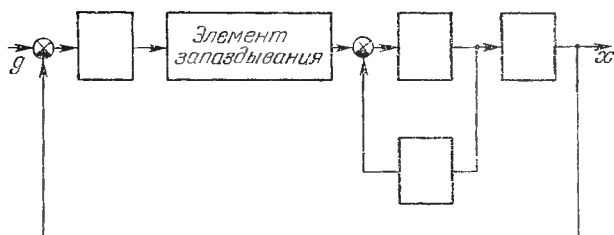
Передаточная функция замкнутой системы равна

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{KN(s)e^{-\tau s}}{L(s) + KN(s)e^{-\tau s}} \quad (9.6)$$

В случае, если элемент запаздывания входит в прямую цепь, по охватывается местной обратной связью

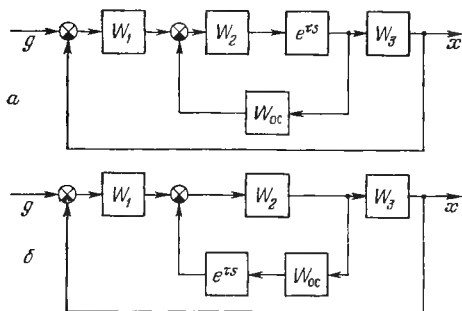


а

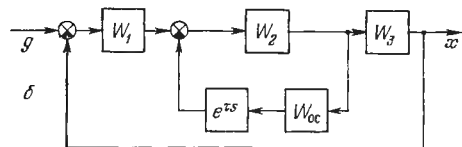


б

Рис. 9.2



а



б

Рис. 9.3

(рис. 9.3, а), общая передаточная функция разомкнутой цепи будет

$$W(s) = \frac{W_1(s) W_2(s) W_3(s) e^{-\tau s}}{1 + W_{oc}(s) W_2(s) e^{-\tau s}}, \quad (9.7)$$

а передаточная функция замкнутой системы получит вид

$$\Phi(s) = \frac{W_1(s) W_2(s) W_3(s) e^{-\tau s}}{1 + [W_{oc}(s) W_2(s) + W_1(s) W_2(s) W_3(s)] e^{-\tau s}}. \quad (9.8)$$

Наконец, если элемент запаздывания находится в цепи обратной связи (рис. 9.3, б), то передаточная функция разомкнутой цепи будет

$$W(s) = \frac{W_1(s) W_2(s) W_3(s)}{1 + W_{oc}(s) W_2(s) e^{-\tau s}}, \quad (9.9)$$

а передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(s) = \frac{W_1(s) W_2(s) W_3(s)}{1 + W_{oc}(s) W_2(s) e^{-\tau s} + W_1(s) W_2(s) W_3(s)}.$$

Построим частотные характеристики разомкнутой цепи системы с запаздыванием для случая (9.5).

Амплитудно-фазовая частотная характеристика будет

$$W(j\omega) = W_0(j\omega) e^{-j\tau\omega}, \quad (9.10)$$

так что амплитудная и фазовая частотные характеристики принимают вид

$$A(\omega) = A_0(\omega), \quad \varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) - \tau\omega, \quad (9.11)$$

т. е. наличие элемента запаздывания не меняет амплитудной частотной характеристики, но существенно влияет на фазовую частотную характеристику, причем

$$\varphi(\omega) \rightarrow -\infty \text{ при } \omega \rightarrow \infty.$$

Поэтому все векторы $A(\omega)$ поворачиваются в отрицательную сторону на угол $\tau\omega$ (рис. 9.4) и кривая $W(j\omega)$ принимает спиральную форму, асимптотически приближаясь к началу координат.

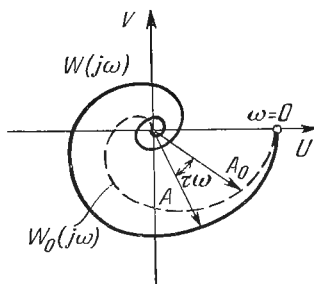


Рис. 9.4

Логарифмические частотные характеристики согласно (9.11) примут вид, показанный на рис. 9.5.

В других случаях, т. е. для выражений (9.7) и (9.9), очертания частотных характеристик будут более сложными.

Обратимся теперь к исследованию *устойчивости замкнутой системы с запаздыванием*.

Характеристическое уравнение системы с запаздыванием, как видно из (9.6), будет трансцендентным

$$L(\lambda) + KN(\lambda)e^{-\tau\lambda} = 0. \quad (9.12)$$

Поэтому алгебраический критерий устойчивости становится здесь слишком сложным (критерии Гурвица и Рауса уже неприменимы).

Критерий Михайлова и Найквиста для систем с запаздыванием сохраняют свои прежние обычные формулировки. Меняется лишь форма годографов.

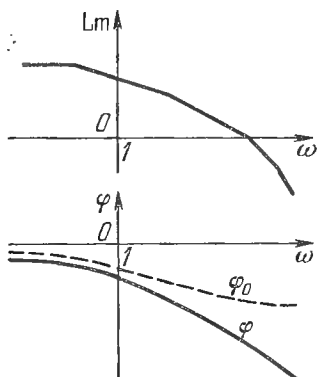


Рис. 9.5

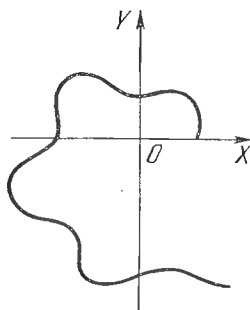


Рис. 9.6

Уравнение кривой Михайлова для случая, показанного на рис. 9.2, согласно (9.12) принимает вид

$$D(j\omega) = L(j\omega) + KN(j\omega) (\cos \tau\omega - j \sin \tau\omega).$$

Отсюда видно, что после выделения вещественной и мнимой частей

$$D(j\omega) = X(\omega, \cos \tau\omega, \sin \tau\omega) + jY(\omega, \cos \tau\omega, \sin \tau\omega)$$

каждая из них будет содержать колебательные по параметру составляющие, что отразится на очертании кривой (рис. 9.6).

Критерий Михайлова удобно применять для определения *границ и областей устойчивости* систем с запаздыванием. На границе устойчивости кривая Михайлова проходит через начало координат, причем так, что весь остальной ход кривой соответствует устойчивости (точ-

нее — при помощи малой деформации кривой у начала координат можно удовлетворить критерию устойчивости). Итак при некотором значении ω будет $D(j\omega) = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} X(\omega, \cos \tau\omega, \sin \tau\omega) &= 0, \\ Y(\omega, \cos \tau\omega, \sin \tau\omega) &= 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Этими двумя уравнениями определяются границы устойчивости по одному параметру или на плоскости двух параметров, или же в пространстве параметров, входящих в коэффициенты уравнений (9.13). Внутри очерченной этими границами области в какой-нибудь одной точке надо проверить весь ход кривой Михайлова, чтобы убедиться, что это действительно область устойчивости.

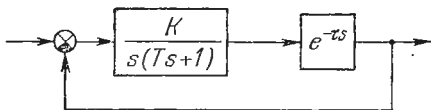


Рис. 9.7

Приведем пример. Пусть согласно рис. 9.7 задана передаточная функция разомкнутой цепи системы

$$W(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{s(Ts + 1)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= T\lambda^2 + \lambda + Ke^{-\tau\lambda}, \\ D(j\omega) &= -T\omega^2 + j\omega + K(\cos \tau\omega - j\sin \tau\omega). \end{aligned}$$

Уравнения границы устойчивости

$$\begin{aligned} X &= -T\omega^2 + K \cos \tau\omega = 0, \\ Y &= \omega - K \sin \tau\omega = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что на границе устойчивости

$$K = \frac{\omega}{\sin \tau\omega}, \quad T = \frac{1}{\omega \operatorname{tg} \tau\omega}.$$

При заданном значении τ на плоскости параметров K, T строим по этим уравнениям (меняя ω) границу устойчивости (рис. 9.8). Таким образом получаем ограниченную область устойчивости. Заметим, что при отсутствии τ эта система устойчива при любых положительных K и T .

Проиллюстрируем теперь использование критерия Найквиста. Из рис. 9.4 и рис. 9.5 видно, что в случае,

показанном на рис. 9.2, частотные характеристики за счет запаздывания τ деформируются так, что система приближается к границе устойчивости и даже может стать неустойчивой.

Найдем критическое время запаздывания $\tau_{кр}$, т. е. такую величину τ , которая выводит систему на границу устойчивости. Тогда $W(j\omega)$ будет проходить через точку

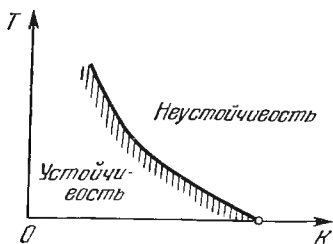


Рис. 9.8

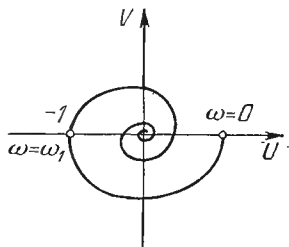


Рис. 9.9

-1 (рис. 9.9). Это значит, что при некотором значении $\omega = \omega_1$ согласно (9.11) получается

$$A_0(\omega_1) = 1, \quad \varphi_0(\omega_1) - \tau_{кр} \omega_1 = -\pi.$$

Отсюда находим

$$\tau_{кр} = \frac{\pi + \varphi_0(\omega_1)}{\omega_1}, \quad (9.14)$$

где ω_1 определяется из условия $A_0(\omega_1) = 1$.

Например, если задано

$$W_0(s) = \frac{k}{Ts + 1},$$

то условие $A_0(\omega) = 1$ принимает вид

$$\frac{k}{\sqrt{T^2 \omega_1^2 + 1}} = 1,$$

откуда

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{T}.$$

Тогда по формуле (9.14) находим

$$\tau_{кр} = \frac{\pi - \arctg \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{k^2 - 1}} T.$$

На рис. 9.10 показана полученная отсюда кривая зависимости относительного критического запаздывания τ/T от коэффициента усиления K . Как видим, при $\tau > \tau_{кр}$ система становится неустойчивой, хотя при отсутствии запаздывания эта система устойчива при любом K .

В тех случаях, когда элемент запаздывания находится в местной обратной связи, его влияние будет совсем иным. В зависимости от структуры системы оно может оказаться и благоприятным, т. е. может улучшать устойчивость системы по аналогии с инерционной обратной связью (см. § 6.2).

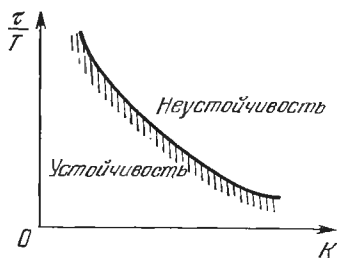


Рис. 9.10

Можно исследовать также влияние запаздывания на качество процесса управления (как на частотные, так и на корневые оценки качества).

§ 9.2. Системы с распределенными параметрами

До сих пор рассматривались системы с сосредоточенными параметрами. Последние выражались в виде коэффициентов усиления и постоянных времени звеньев. Динамика системы описывалась обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В том случае, когда в системе появляется звено с распределенными параметрами (длинная электрическая линия, длинный трубопровод и т. п.), динамика такого звена описывается дифференциальными уравнениями в частных производных.

Например, уравнения длинной электрической линии имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + l \frac{\partial i}{\partial t} + ri = 0, \quad \frac{\partial i}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial t} + qu = 0, \quad (9.15)$$

где x , u , i — текущие значения расстояния, напряжения и тока вдоль линии; l , c , r , q — индуктивность, емкость, сопротивление и проводимость на единицу длины линии.

Уравнения водяного трубопровода имеют вид

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial h}{\partial x} + bv, \quad -\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (9.16)$$

где x, v, h — переменные значения расстояния, скорости течения и напора воды вдоль трубопровода; b, a, g — коэффициент трения, скорость звука в воде и ускорение силы тяжести.

Уравнения газового трубопровода имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (9.17)$$

где x, v, p — текущие значения (вдоль трубопровода) расстояния, скорости и давления газа; ρ, a — плотность газа (в установившемся режиме) и скорость звука в газе.

Звенья с распределенными параметрами могут входить в состав замкнутой системы автоматического регулирования наряду с другими звеньями, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями. Примерами таких систем являются система автоматического регулирования скорости гидротурбины, система регулирования давления газа, подаваемого потребителю, и др.

Общий подход к исследованию и расчету автоматической системы с распределенными параметрами следующий. Определяются граничные условия (например, на обоих концах длинной линии или трубопровода), которые имеют место в данной системе. Решаются уравнения в частных производных с учетом этих граничных условий.

В результате для звена с распределенными параметрами получается трансцендентная передаточная функция $W_p(s)$, которая включается в общую систему в сочетании с обыкновенными передаточными функциями остальных звеньев.

Например, для длинной электрической линии (9.15) получается [36] передаточная функция

$$W_p(s) = \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{(r+ls)(q+cs)} L},$$

где L — полная длина линии.

При отсутствии потерь ($r=0, q=0$) передаточная функция длинной линии примет вид

$$W_p(s) = e^{-\tau s}, \quad \tau = L\sqrt{ls},$$

т. е. она сводится к элементу запаздывания (9.4).

Для водяного трубопровода (9.16) в системе регулирования скорости гидротурбины (рис. 9.11) передаточная

функция [36] будет

$$W_p(s) = \frac{gs - a \sqrt{s(s+b)} \operatorname{th} \sqrt{s(s+b)} \cdot \tau}{gs + \frac{a}{2} \sqrt{s(s+b)} \operatorname{th} \sqrt{s(s+b)} \cdot \tau}, \quad \tau = \frac{2L}{a}.$$

При отсутствии сопротивления ($b=0$) получаем

$$W_p(s) = \frac{(1-2c)e^{\tau s} + (1+2c)e^{-\tau s}}{(1+c)e^{\tau s} + (1-c)e^{-\tau s}}, \quad c = \frac{a}{2g}.$$

Здесь получается элемент запаздывания более сложного типа.

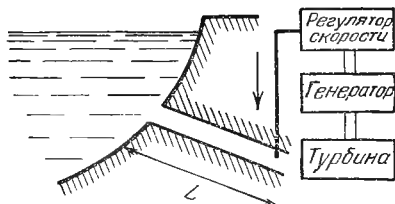


Рис. 9.11

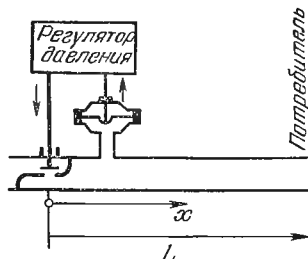


Рис. 9.12

Для газового трубопровода (9.17) в системе регулирования давления p (рис. 9.12) передаточная функция принимает вид [25]

$$W_p(s) = \frac{1 + be^{-\tau s}}{1 + be^{-\tau s} + c(1 - be^{-\tau s})}, \quad \tau = \frac{2L}{a},$$

причем

$$b = \frac{2(c+1) - k}{2(c-1) - k}, \quad c = \frac{a}{v},$$

где k — показатель степени в адиабатическом уравнении состояния газа, v — скорость газа в установившемся режиме.

В обоих последних примерах величина τ является значением времени прохождения звука по трубопроводу туда и обратно.

После получения трансцендентной передаточной функции звена с распределенными параметрами устойчивость системы в целом исследуется так же, как и для систем с запаздыванием (§ 9.1), с помощью критерия Михайлова или критерия Найквиста. Для анализа качества процессов управления могут быть применены частотные оценки.

§ 9.3. Системы с переменными параметрами

При автоматическом управлении движением часто сам управляемый объект описывается *дифференциальным уравнением с переменными во времени коэффициентами*.

Например, в процессе движения самолета уменьшается его масса за счет выгорания топлива, изменяется скорость полета, плотность атмосферы с изменением высоты

полета и т. п. Эти переменные во времени параметры входят в коэффициенты уравнений динамики полета самолета. То же самое относится и к подводным аппаратам.

Другим примером может служить автоматически управляемая манипуляционная система робота, в которой переменным параметром является момент инерции за счет изменения конфигурации манипулятора и грузов в процессе движения.

Вследствие переменности параметров объекта вся замкнутая система автоматического управления будет описываться

дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами

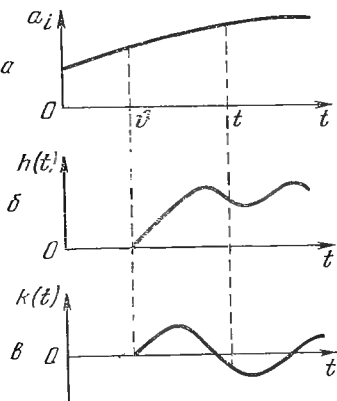
$$\begin{aligned} a_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t) x = \\ = b_0(t) \frac{d^m f}{dt^m} + \dots + b_{m-1}(t) \frac{df}{dt} + b_m(t) f(t). \end{aligned} \quad (9.18)$$

Будем полагать, что задан закон изменения каждого коэффициента a_i и b_j во времени (рис. 9.13, а).

Очевидно, что формы переходной $h(t)$ и весовой $k(t)$ функций в такой системе будут зависеть от того, в какой момент времени ϑ (рис. 9.13) подается на систему соответственно единичный скачок или импульс. Поэтому переходная и весовая функции будут здесь *параметрическими* с параметром ϑ , т. е.

$$h(t - \vartheta, \vartheta), \quad k(t - \vartheta, \vartheta).$$

Рис. 9.13



Возможны два варианта рассмотрения этих функций: 1) нормальный, когда t — переменная, как на рис. 9.13, $\vartheta = \text{const}$; 2) сопряженный, когда ϑ — переменная, $t = \text{const}$.

Последний применяется, например, для вычисления интеграла, определяющего изменение регулируемой величины

$$x(t) = \int_0^t k(t - \vartheta, \vartheta) f(\vartheta) d\vartheta.$$

Вообще весовая функция $k(t, \vartheta)$ или, как ее еще называют, импульсная переходная функция (реакция на импульсное воздействие) является основной динамической характеристикой линейной системы с переменными параметрами [33]. Но раз она зависит от двух переменных (t и ϑ , рис. 9.13), то графически ее можно представить в трехмерном пространстве (рис. 9.14). Естественно,

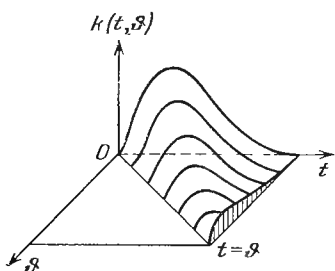


Рис. 9.14

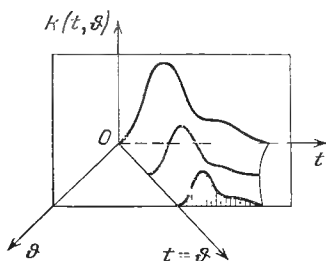


Рис. 9.15

что она равна нулю при $t = \vartheta$, т. е. в момент приложения импульса, а также при $t < \vartheta$, т. е. до момента приложения импульса. Поскольку система имеет переменные параметры, то очертание весовой функции $k(t, \vartheta)$ будет меняться с изменением момента приложения импульса ϑ , как показано, например, на рис. 9.14.

Нормальная форма весовой функции, когда t переменное, а $\vartheta = \text{const}$, изобразится сечением, показанным на рис. 9.15. Сопряженная форма весовой функции ($t = \text{const}$, а ϑ переменная) получится другим сечением (рис. 9.14).

Аналитическое определение функций h и k в системах с переменными параметрами затруднительно. Для систем высокого порядка это возможно только численными приемами.

Столь же трудно и определение передаточной функции. Она будет параметрической с параметром t и вычисляется согласно определению (1.9) как изображение по Лапласу весовой функции, а именно:

$$\Phi(s, t) = \int_{-\infty}^t k(t - \vartheta, \vartheta) e^{-s(t-\vartheta)} d\vartheta.$$

При этом изображение по Лапласу выходной величины имеет вид

$$X(s, t) = \Phi(s, t)F(s).$$

Передаточные функции системы с переменными параметрами $W(s, t)$ и $\Phi(s, t)$ не выражаются простым отношением многочленов, как в обыкновенных системах, а имеют значительно более сложное выражение.

Для расчета систем с переменными параметрами можно применять коэффициенты ошибок, формулы для которых аналогичны прежним (§ 3.4).

Существуют специальные методы исследования устойчивости систем с переменными параметрами, имеющие весьма существенное отличие от обычных. Особенность состоит в том, что вследствие переменности коэффициентов трудно говорить об асимптотической устойчивости (т. е. о свойстве $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$). Поведение такой системы рассматривают обычно на конечном интервале времени ($t_0 \leq t \leq T$). При этом устойчивость системы понимается как ее свойство, проявляющееся в том, что после прекращения действия внешних возмущений координаты состояния системы, начиная с некоторого момента времени вплоть до конечного $t = T$, не выходят за пределы заранее заданных конечных значений (допустимых по техническим условиям). С этим связан термин «техническая устойчивость».

Существует несколько методов определения весовой и передаточной функций, частотных характеристик, а также исследования устойчивости систем с переменными параметрами. Для их изучения можно обратиться к книгам [33] и [20]. Если найдена весовая функция, то система с переменными параметрами будет устойчивой на заданном интервале времени T , если ее весовая функция (в нормальной форме) является затухающей во времени для всех ϑ , лежащих внутри этого интервала [33], что можно

выразить в виде

$$\int_{\vartheta}^{\infty} |k(t, \vartheta)| dt < \infty, \quad 0 < \vartheta < T.$$

Если же найдена передаточная функция $\Phi(t, \vartheta)$, то для устойчивости линейной системы с переменными параметрами на конечном интервале времени необходимо и достаточно, чтобы эта функция не имела полюсов в правой полуплоскости и на мнимой оси комплексной плоскости s при всех ϑ , лежащих в данном интервале.

Формулировки достаточно простые, но важная особенность состоит здесь в определении весовой и передаточной функций.

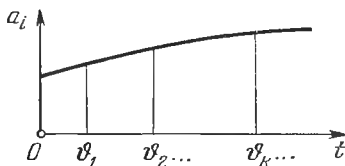


Рис. 9.16

Ввиду больших трудностей точного решения задачи исследования и проектирования систем с переменными параметрами применяются приближенные методы и методы численного решения на вычислительных машинах.

Наиболее распространенным приближенным методом является *метод замороженных коэффициентов*. Он применим для систем со сравнительно медленным во времени изменением параметров по сравнению с протеканием переходных процессов, как это часто имеет место в системах автоматического управления движущимися объектами.

Метод замороженных коэффициентов заключается в следующем. Весь рассматриваемый интервал времени работы данной системы разбивается на участки так, чтобы внутри каждого участка параметры изменялись не очень значительно (рис. 9.16). Для произвольного участка с начальным значением времени

$$t_0 = \vartheta_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

все коэффициенты дифференциального уравнения (9.18) считаются постоянными, равными их значениям в начале участка, т. е. для k -го участка имеем уравнение

$$a_0(\vartheta_k) \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_n(\vartheta_k) x = b_0(\vartheta_k) \frac{d^m f}{dt^m} + \dots + b_m(\vartheta_k) f(t).$$

Внутри каждого участка исследуется соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными

ми коэффициентами (по разным участкам) согласно разделам теории автоматического управления, изложенным в предыдущих главах.

Очевидно, что если на объект с переменными параметрами поставить систему управления с постоянными параметрами, то качество процесса управления будет меняться с течением времени.

Нужно проверить, допустимо ли это. Если нет, то надо изменять и параметры системы (общий коэффициент усиления и постоянные времени корректирующих устройств). Обычно это изменение производится автоматически в процессе управления движением по заранее заложенной программе по времени или по величине скорости движения или же по другим признакам изменения состояния системы. Чаще всего такая перестройка параметров системы управления делается скачками в одной-двух или нескольких точках всего интервала движения.

Решение, полученное в соответствии с методом замороженных коэффициентов, можно уточнять *методом последовательных приближений*, например, следующим образом.

Представим все коэффициенты уравнения (9.18) в виде

$$a_i(t) = a_i^0 + a_i^* = a_i^0(\vartheta) + a_i^*(t), \quad t \geq \vartheta, \quad (9.19)$$

где ϑ — начало рассматриваемого участка времени (рис. 9.13, а).

Запишем уравнение (9.18) с учетом обозначений (9.19)

$$\begin{aligned} a_0^0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1^0 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}^0 \frac{dx}{dt} + a_n^0 x = \\ = f_1(t) - \left(a_0^* \frac{d^n x}{dt^n} + a_1^* \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n^* x \right), \end{aligned} \quad (9.20)$$

где

$$f_1(t) = b_0(t) \frac{d^m f}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + \dots + b_m(t) f(t).$$

Решение ищется в виде

$$x(t) \approx x_1 + x_2 + \dots + x_k.$$

Первое приближение x_1 находим по методу замороженных коэффициентов, т. е. решается уравнение

$$a_0^0 \frac{d^n x_1}{dt^n} + \dots + a_n^0 x_1 = f_1(t).$$

Остальные решения ищутся как добавки к предыдущим в соответствии с правой частью (9.20). Для этого решаются последовательно следующие уравнения с постоянными коэффициентами и с заданной функцией времени в правой части, содержащей найденное предыдущее решение, а именно:

$$a_0^0 \frac{d^n x_2}{dt^n} + \dots + a_n^0 x_2 = f_2(t),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_0^0 \frac{d^n x_k}{dt^n} + \dots + a_n^0 x_k = f_k(t),$$

где

$$\begin{aligned} f_2(t) &= - \left(a_0^* \frac{d^n x_1}{dt^n} + \dots + a_n^* x_1(t) \right) \\ &\dots \dots \dots \\ f_k(t) &= - \left(a_0^* \frac{d^n x_{k-1}}{dt^n} + \dots + a_n^* x_{k-1}(t) \right). \end{aligned}$$

В результате получаем уточненное решение дифференциального уравнения с переменными во времени коэффициентами.

Итак, при достаточно медленном изменении переменных параметров в исследуемой системе (9.18), можно находить решение для управляемой величины $x(t)$ либо по методу замороженных коэффициентов по участкам, либо по изложенному здесь методу получения уточненного решения с учетом непрерывной переменности коэффициентов.

В первом случае применение обычных методов расчета устойчивости и синтеза корректирующих устройств (по участкам), как указано выше, является очевидным.

Во втором случае (уточненное решение) можно заметить, что при заданных переменных параметрах системы, каждый шаг последовательной процедуры представляет собой решение уравнения с постоянными параметрами при заданной функции времени в правой части. Таким

образом, применяя достаточно просто осуществляемый машинный метод решения, можно проверить устойчивость системы на конечном интервале времени в указанном выше смысле «технической устойчивости», если задать $f(t)$ в виде единичного скачка. При этом можно проследить и качество процесса управления при такой и других формах воздействия $f(t)$.

§ 9.4. Дискретные системы

К дискретным системам относятся импульсные, цифровые и релейные. В *импульсных системах* производится квантование сигнала по времени, в *релейных* — по уровню, в *цифровых* — по времени и по уровню.

Следовательно, дискретная система отличается тем, что в ее состав, помимо обыкновенных звеньев, входит одно или несколько звеньев, производящих указанное квантование непрерывного сигнала в дискретный. Это будет либо импульсный, либо релейный элемент, либо цифровой вычислитель. Дискретные системы имеют большое значение в современной технике.

Импульсная система состоит из импульсных элементов (одного или нескольких) и непрерывных частей, составленных из обыкновенных линейных звеньев (рис. 9.17).

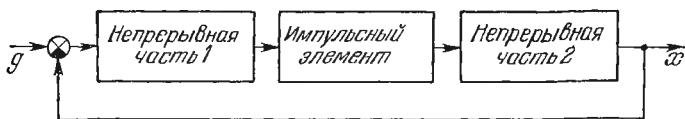


Рис. 9.17

В импульсных системах применяются три основных вида *квантования сигнала по времени*:

- а) амплитудно-импульсная модуляция (амплитуда импульса пропорциональна входному сигналу — линейная импульсная система);
- б) широтно-импульсная модуляция (ширина импульса пропорциональна входному сигналу);
- в) фазо-импульсная модуляция (фаза импульса пропорциональна входному сигналу).

Во всех случаях период чередования импульсов (период квантования) является постоянным. Возможны и более сложные случаи.

Пусть на вход импульсного элемента поступает непрерывный сигнал $x(t)$ (рис. 9.18, а). Период квантования обозначим T . Выделим значения входного сигнала $x(t)$, соответствующие началу каждого импульса (рис. 9.18, б), обозначив их $x[nT]$, где n — порядковый номер импульса. Полученная таким образом функция называется *решетчатой функцией*.

В случае *амплитудно-импульсной* модуляции сигнал на выходе импульсного элемента $y(t)$ будет иметь вид, представленный на рис. 9.18, в. Длительность каждого импульса одинакова. Она обозначена γT ($0 < \gamma < 1$), а величина равна значению $x[nT]$.

Поскольку единичный импульс длительностью γT , помещенный в начале ($t=0$), можно записать в виде

$$s_1(t) = 1(t) - 1(t - \gamma T),$$

то выходная величина импульсного элемента (рис. 9.18, в) будет

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] s_1(t - nT), \quad (9.21)$$

причем аргумент $(t - nT)$ означает сдвиг каждого очередного импульса от начала ($t=0$) на величину nT по оси времени.

В случае *широотно-импульсной модуляции* (рис. 9.18, г) изменяется ширина импульса

$$\gamma_n = ax[nT], \quad (9.22)$$

причем длительность его $\gamma_n T$ не должна превышать периода T , т. е. должно иметь место ограничение

$$aM \leq 1, \quad \text{если} \quad |x(t)| < M.$$

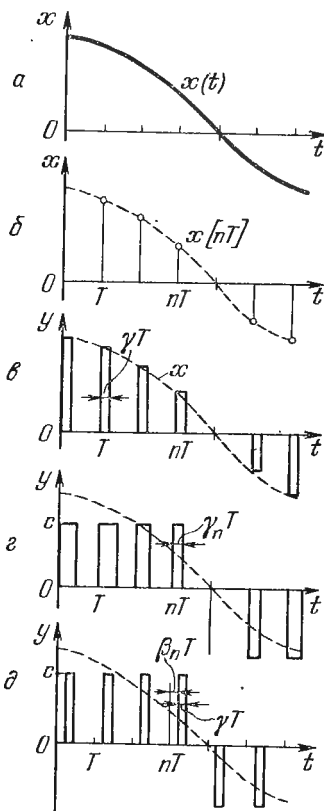


Рис. 9.18

Величина импульсов остается постоянной c (рис. 9.18, ε). Тогда выходная величина импульсного элемента будет

$$y(t) = c \sum_{n=0}^{\infty} s_1(t - nT) \operatorname{sign} x[nT], \quad (9.23)$$

где

$$s_1(t) = 1(t) - 1(t - \gamma T),$$

а аргумент $(t - nT)$ означает сдвиг импульса по времени.

Наконец, в случае *фазо-импульсной модуляции* импульсы остаются постоянными по величине c и по длительности γT ($\gamma = \text{const}$), но вводится переменный сдвиг импульса по времени внутри каждого периода (рис. 9.18, ∂) на величину

$$\beta_n = bx[nT], \quad (9.24)$$

причем аналогично предыдущему должно выполняться условие

$$bM \leq 1 - \gamma,$$

если $|x(t)| < M$.

Выходная величина импульсного элемента в данном случае равна

$$y(t) = c \sum_{n=0}^{\infty} s_1(t - nT - \beta_n T) \operatorname{sign} x[nT]. \quad (9.25)$$

Импульсные элементы могут иметь различную конструкцию и различную физическую основу.

В *цифровых системах* автоматического управления к квантованию сигнала по времени добавляется еще квантование его по уровню (рис. 9.19).

Обозначим через h размер одной ступени квантования сигнала по уровню. Тогда величина каждого значения решетчатой функции выходной величины цифрового звена (рис. 9.19, δ) будет

$$y[nT] = kh \operatorname{sign} x[nT], \quad (9.26)$$

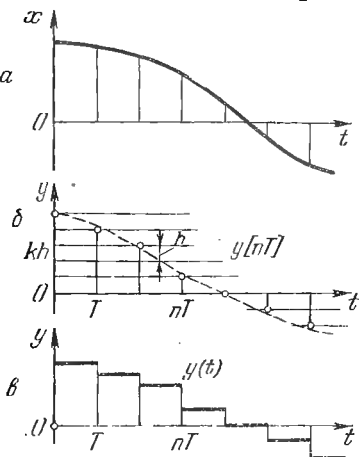


Рис. 9.19

где k — целое число ступеней h , которое определяется условием

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)h \leq |x[nT]| \leq \left(k + \frac{1}{2}\right)h,$$

т. е. значение kh берется ближайшим к значению $x[nT]$, как показано на рис. 9.19, б.

Значения решетчатой функции $y[nT]$ запоминаются на весь период квантования. Поэтому выходная величина цифрового звена будет иметь вид, изображенный на рис. 9.19, в. Описанная процедура именуется *импульсно-кодовой модуляцией*. Она переводит непрерывную величину $x(t)$ в цифровую величину $y[nT]$ в определенной системе счисления. Величина h соответствует единице числа, k — число. Близость решетчатой функции $y[nT]$ к значениям $x[nT]$ зависит от количества разрядов цифрового устройства. Чем больше количество разрядов (меньше h) и чем меньше период T , тем точнее $y[nT]$ воспроизводит непрерывную функцию $x(t)$.

В цифровых устройствах обычно величина $x(t)$, которая здесь фигурирует как входная для импульсно-кодовой модуляции, получается в результате вычисления по определенному алгоритму непосредственно в цифровом виде $y[nT]$ (рис. 9.19, в). На вычисление требуется некоторое время τ . Поэтому цифровое звено в контуре системы

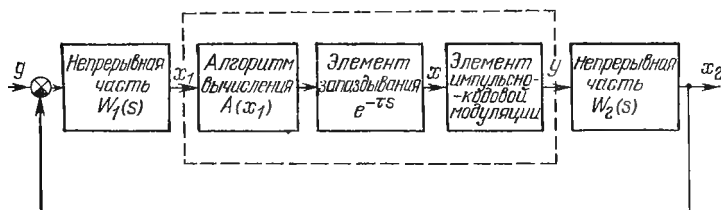


Рис. 9.20

автоматического управления можно представить в виде, изображенном на рис. 9.20. Здесь показаны: алгоритм вычисления $A(x_1)$, формирующий величину $x(t)$; время τ , необходимое для вычисления; элемент импульсно-кодовой модуляции $y(x)$, охарактеризованный на рис. 9.19.

Такая схема является условной для расчета динамики системы. Схема технического выполнения системы с цифровым звеном показана на рис. 9.21, где через Н/Д и

Д/Н обозначены преобразователи соответственно непрерывной величины в дискретную и дискретной в непрерывную.

Это схемы одномерной системы. Часто цифровые вычислительные устройства и машины применяются в более сложных многомерных системах с многими входами и выходами.

Наличие квантования сигнала по уровню характеризует нелинейность системы. Однако при достаточно большом числе разрядов величину $y = \{nT\}$ (рис. 9.19) можно считать близкой к величине $x[nT]$. Тогда нелинейную импульсно-кодировую модуляцию можно приближенно заменить линейной амплитудно-импульсной модуляцией

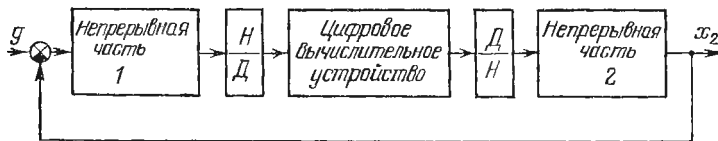


Рис. 9.21

(рис. 9.18, в), считая $\gamma = 1$ в соответствии с рис. 9.19, в.

Если при этом алгоритм вычислений $A(x_1)$ линейный, то такую цифровую систему можно свести к линейной импульсной системе при $\gamma = 1$. При нелинейном алгоритме $A(x_1)$ будет нелинейная импульсная система.

При достаточно малом периоде T и большом числе разрядов цифровую систему автоматического управления в целом можно рассчитывать как обыкновенную непрерывную систему (линейную или нелинейную).

В общем же случае цифровая система автоматического управления является нелинейной дискретной системой.

ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 10.1. Уравнения и передаточные функции

Рассмотрим импульсную систему с амплитудно-импульсной модуляцией (рис. 10.1, а). Здесь ошибка (рас-согласование) обозначена, в отличие от обычных линей-ных систем, через Φ , так как буква ε будет иметь тут другой смысл.

Разомкнем систему и расчленим условно импульсный элемент на две части: *простейший импульсный элемент*,

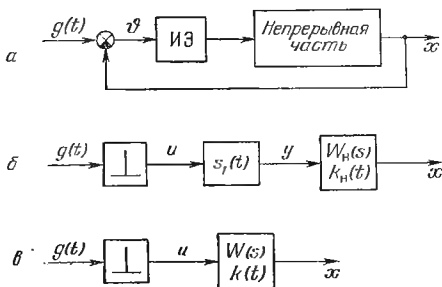


Рис. 10.1

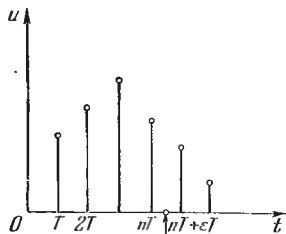


Рис. 10.2

обозначенный знаком $\perp$ на рис. 10.1, б, и *формирователь импульса* $s_1(t)$. Первый из них дает решетчатую функцию $u(t)$ (рис. 10.2), т. е.

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g[nT] \delta(t - nT),$$

а второй придает каждому импульсу определенную длительность γT . Через $W_n(s)$ и $k_n(t)$ на рис. 10.1, б обозначены передаточная и весовая функции непрерывной части системы.

Формирователь импульсов можно описать некоторой передаточной функцией $W_\Phi(s)$. Применяя преобразование Лапласа функции, описывающей прямоугольный импульс

длительностью γT и величиной 1, т. е.

$$s_1(t) = 1(t) - 1(t - \gamma T), \quad (10.1)$$

находим

$$W_\Phi(s) = \int_0^\infty s_1(t) e^{-st} dt = \int_0^{\gamma T} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s} (1 + e^{-\gamma Ts}). \quad (10.2)$$

Объединив $W_\Phi(s)$ с непрерывной частью $W_H(s)$ в общий блок (рис. 10.1, в), получим

$$W(s) = W_\Phi(s) W_H(s).$$

Этот блок называется *приведенной непрерывной частью*. Весовая функция последней получает вид

$$k(t) = \int_0^t k_H(t - \tau) s_1(\tau) d\tau.$$

Величину t согласно рис. 10.2 можно представить следующим образом

$$t = nT + \varepsilon T, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В дальнейшем удобно пользоваться относительным временем

$$\bar{t} = \frac{t}{T} = n + \varepsilon.$$

При этом уравнение разомкнутой цепи импульсной системы (рис. 10.1, в) можно записать через решетчатую входную функцию $g[n]$ в виде

$$x[n, \varepsilon] = \sum_{r=0}^{\infty} k[n - r, \varepsilon] g[r], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

где r , как и n , обозначает относительное текущее время, по которому производится суммирование.

Учитывая, что при $\bar{t} < 0$ имеем $k(\bar{t}) = 0$, значения $r > n$ можно отбросить, и это уравнение записать в виде

$$x[n, \varepsilon] = \sum_{r=0}^n k[n - r, \varepsilon] g[r]. \quad (10.3)$$

Перейдем к определению передаточных функций системы.

В используемом ниже преобразовании Лапласа для импульсных систем введем безразмерную комплексную

переменную

$$q = sT.$$

Изображения входной и выходной величин определяются *дискретным преобразованием Лапласа* и обозначаются соответственно

$$G^*(q) = \mathcal{D}\{g[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} g[n] e^{-qn},$$

$$X^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{x[n, \varepsilon]\}.$$

Здесь видна полная аналогия с обычным преобразованием Лапласа, но с суммированием дискретных величин вместо интегрирования непрерывных.

Применяется также $\mathcal{Z}$ -преобразование, которое эквивалентно приведенному выше, а именно, обозначив

$$z = e^q,$$

получим

$$\mathcal{Z}\{g[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} g[n].$$

Передаточная функция разомкнутой цепи импульсной системы, как отношение изображений выходной и входной величин при нулевых начальных условиях представляется в форме (*дискретная передаточная функция*)

$$W^*(q, \varepsilon) = \frac{X^*(q, \varepsilon)}{G^*(q)}. \quad (10.4)$$

Здесь текущее безразмерное время ε между импульсами отсутствует в знаменателе, так как входная величина $g[n]$ есть решетчатая функция.

Дискретная передаточная функция может быть определена еще иначе. Предварительно находится

$$W(q) = \frac{1}{T} W(s) \Big|_{s=\frac{q}{T}},$$

а затем применяется так называемое $\overline{\mathcal{D}}$ -преобразование:

$$W^*(q, \varepsilon) = \overline{\mathcal{D}}\{W(q)\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} W(q + 2\pi jr) e^{(q+2\pi jr)\varepsilon}. \quad (10.5)$$

Для вычислений удобно пользоваться выражением

$$W^*(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^m \left[\operatorname{Res} W(q_i) \frac{e^{q_i \varepsilon}}{e^q - e^{q_i}} \right],$$

где m — число полюсов q_i передаточной функции $W(q)$.

Аналогично обычным линейным системам здесь имеется следующее соотношение между передаточной и весовой функциями:

$$W^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D} \{k[n, \varepsilon]\} = \sum_{n=0}^{\infty} k[n, \varepsilon] e^{-qn}, \quad (10.6)$$

$$k[n, \varepsilon] = \mathcal{D}^{-1}\{W^*(q, \varepsilon)\}.$$

Приведем два примера.

Пример 1. В импульсной системе с простейшим импульсным элементом (рис. 10.1, в) задана

$$W(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}.$$

Такое устройство называется импульсным фильтром.

Весовая функция системы находится следующим образом:

$$k(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = \frac{k_1}{T_1} e^{-t/T_1}.$$

Заменим $t = (n + \varepsilon)T$. Тогда получим

$$k[n, \varepsilon] = \frac{k_1}{T_1} e^{-\beta[n+\varepsilon]}, \quad \beta = \frac{T}{T_1}.$$

По формуле (10.6), пользуясь таблицей дискретного преобразования Лапласа, находим передаточную функцию импульсного фильтра

$$W^*(q, \varepsilon) = \frac{k_1}{T_1} \frac{e^q}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta \varepsilon}.$$

Пример 2. Пусть в той же импульсной системе формируются импульсы длительностью γT . Тогда с учетом (10.2) будем иметь:

$$W(s) = W_{\Phi}(s) W_{\Pi}(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-\gamma T s}) \frac{k_1}{T_1 s + 1}.$$

Отсюда по формуле (10.5), используя таблицы $\overline{\mathcal{D}}$ -преоб-

разования, получаем передаточную функцию (при $\varepsilon = 0$)

$$W^*(q, 0) = k_1 e^{-\beta} \frac{e^{\beta\gamma} - 1}{e^q - e^{-\beta}}.$$

В общем случае передаточная функция разомкнутой цепи импульсной системы имеет вид

$$W^*(q, \varepsilon) = \frac{N^*(q, \varepsilon)}{L^*(q)},$$

где

$$N^*(q, \varepsilon) = c_0(\varepsilon) e^{qk} + c_1(\varepsilon) e^{q(k-1)} + \dots + c_{k-1}(\varepsilon) e^q + c_k(\varepsilon),$$

$$L^*(q) = b_0 e^{qm} + b_1 e^{q(m-1)} + \dots + b_{m-1} e^q + b_m,$$

причем показатель степени $k < m$.

В соответствии со свойством $\mathcal{D}$ -преобразования передаточная функция $W^*(q, \varepsilon)$ будет периодической вдоль мнимой оси плоскости $q = \alpha + j\bar{\omega}$ с периодом 2π . Здесь $q = st$. Поэтому $\bar{\omega} = \omega T$ — безразмерная частота.

Следовательно, $W^*(q, \varepsilon)$ будет вполне определена своими значениями в основной полосе (рис. 10.3):

$$-\pi < \bar{\omega} \leq \pi, \quad -\infty < \alpha < \infty.$$

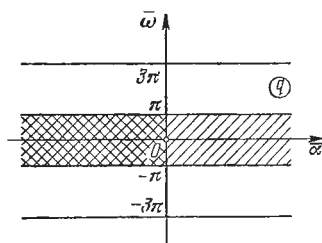


Рис. 10.3

Заменой

$$e^q = z \quad (10.7)$$

получаем передаточную функцию в форме $\mathcal{Z}$ -преобразования

$$W_z^*(z, \varepsilon) = \frac{N_z^*(z, \varepsilon)}{L_z^*(z)},$$

где

$$N_z^*(z, \varepsilon) = c_0(\varepsilon) z^k + c_1(\varepsilon) z^{k-1} + \dots + c_{k-1}(\varepsilon) z + c_k(\varepsilon),$$

$$L_z^*(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m \quad (k < m).$$

Преобразование (10.7) отображает основную полосу, которая заштрихована на рис. 10.3 во всю плоскость z , причем отрезок мнимой оси

$$q = j\bar{\omega}, \quad -\pi < \bar{\omega} \leq \pi$$

отображается в окружность единичного радиуса

(рис. 10.4)

$$z = e^{j\omega}.$$

При этом левая часть полосы отображается внутрь единичного круга.

Таким образом характеризуется разомкнутая цепь импульсной системы.

Запишем теперь уравнение замкнутой импульсной системы (рис. 10.5). Представим его в виде

$$x[n, \varepsilon] = \sum_{r=0}^n k[n-r, \varepsilon] g[r] - \sum_{r=0}^n k[n-r, \varepsilon] x[r], \quad (10.8)$$

где k — весовая функция разомкнутой цепи.

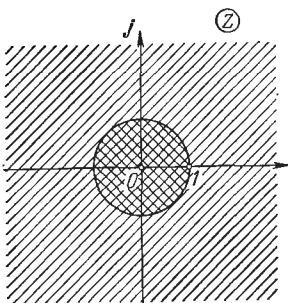


Рис. 10.4

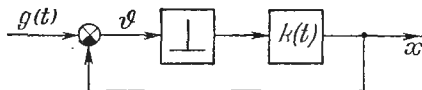


Рис. 10.5

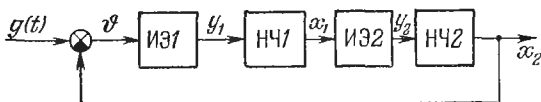


Рис. 10.6

Соответственно *главная передаточная функция замкнутой системы* примет вид

$$\Phi^*(q, \varepsilon) = \frac{X^*(q, \varepsilon)}{G^*(q)} = \frac{W^*(q, \varepsilon)}{1 + W^*(q, \varepsilon)} = \frac{N^*(q, \varepsilon)}{L^*(q) + N^*(q, \varepsilon)}. \quad (10.9)$$

При этом выходную величину замкнутой системы можно будет определить согласно выражению

$$x[n, \varepsilon] = \sum_{r=0}^n k_s[n-r, \varepsilon] [g(r)], \quad (10.10)$$

где k_s — весовая функция замкнутой системы

$$k_s[n, \varepsilon] = \mathcal{D}^{-1}\{\Phi^*(q, \varepsilon)\}.$$

Обратимся теперь к системе с двумя импульсными элементами (рис. 10.6). Если периоды чередования импульсов в обоих элементах одинаковы, то система называется *синхронной*. В противном случае — *асинхронной*.

Если в синхронной системе совпадают и моменты начала импульсов, то система называется *синфазной*.

Рассмотрим синхронную систему. Пусть $\varepsilon_1 T$ — смещение импульсов второго элемента по отношению к первому, как показано на рис. 10.7. Тогда

$$y_1(\bar{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} s_1(\bar{t} - n) g[n], \quad \bar{t} = \frac{t}{T},$$

$$y_2(\bar{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} s_2(\bar{t} - n - \varepsilon_1) x_1[n, \varepsilon_1],$$

где $s_1(t)$ и $s_2(t)$ — функции формирования импульсов типа (10.1), но смещенные по оси времени соответственно на n и на $n + \varepsilon_1$.

Введем здесь, как и раньше, простейшие импульсные элементы в разомкнутой цепи системы и рассмотрим приведенные линейные части (рис. 10.8), где представлена разомкнутая цепь импульсной системы.

Тогда получим

$$k_1(t) = \int_0^t k_{1H}(t - \tau) s_1(\tau) d\tau,$$

$$k_2(t) = \int_0^t k_{2H}(t - \tau) s_2(\tau) d\tau.$$

Переходя к относительному времени $\bar{t} = \frac{t}{T} = n + \varepsilon$, с учетом сдвига ε_1 во втором импульсном элементе можно

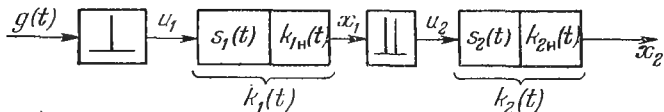


Рис. 10.8

записать уравнения для разомкнутой цепи

$$x_1[n, \varepsilon] = \sum_{r=0}^n k_1[n - r, \varepsilon] g[r],$$

$$x_2[n, \varepsilon] = \sum_{r=0}^n k_2[n - r, \varepsilon - \varepsilon_1], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.11)$$

Найдем передаточную функцию разомкнутой цепи. В изображениях дискретного преобразования Лапласа получаем

$$X_1^*(q, \varepsilon) = W_1^*(q, \varepsilon) G^*(q),$$

$$X_2^*(q, \varepsilon) = W_2^*(q, \varepsilon - \varepsilon_1) X_1^*(q, \varepsilon_1),$$

а следовательно,

$$X_2^*(q, \varepsilon) = W_2^*(q, \varepsilon - \varepsilon_1) W_1^*(q, \varepsilon_1) G^*.$$

В передаточной функции W_1^* здесь сделана замена ε на ε_1 , так как на вход последнего звена (рис. 10.8) поступает решетчатая функция со сдвигом ε_1 .

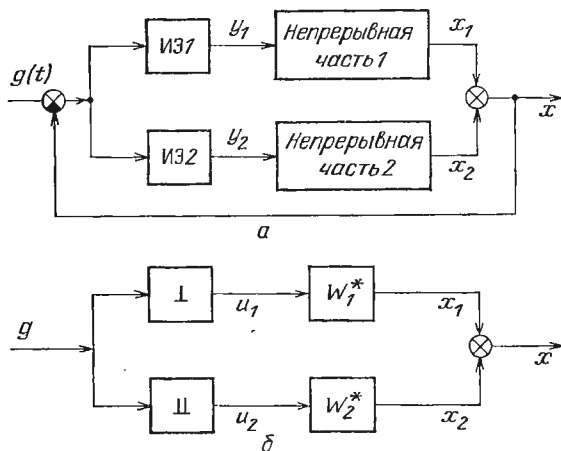


Рис. 10.9

Передаточная функция разомкнутой цепи представится в форме

$$W^*(q, \varepsilon) = W_1^*(q, \varepsilon_1) W_2^*(q, \varepsilon - \varepsilon_1). \quad (10.12)$$

В случае синфазной системы ($\varepsilon_1 = 0$) получим

$$W^*(q, \varepsilon) = W_1^*(q) W_2^*(q, \varepsilon). \quad (10.13)$$

Проведем аналогичные преобразования для синхронной системы с параллельно соединенными импульсными элементами (рис. 10.9). В дискретных изображениях

имеем

$$X_1^*(q, \varepsilon) = W_1^*(q, \varepsilon) G^*(q),$$

$$X_2^*(q, \varepsilon) = W_2^*(q, \varepsilon - \varepsilon_1) G^*(q, \varepsilon_1),$$

где ε_1 — сдвиг во втором импульсном элементе по отношению к первому.

Поскольку на рис. 10.9 $x = x_1 + x_2$, то

$$X^*(q, \varepsilon) = W_1^*(q, \varepsilon) G^*(q) + W_2^*(q, \varepsilon - \varepsilon_1) G^*(q, \varepsilon_1).$$

Очевидно, что написание единой передаточной функции всей разомкнутой цепи возможно в этом случае только для синфазной системы ($\varepsilon_1 = 0$). Тогда

$$W^*(q, \varepsilon) = \frac{X^*(q, \varepsilon)}{G^*(q)} = W_1^*(q, \varepsilon) + W_2^*(q, \varepsilon). \quad (10.14)$$

Для передаточной функции замкнутой системы во всех случаях сохраняется прежняя формула (10.9).

Изложенные результаты легко распространяются и на системы с несколькими импульсными элементами.

§ 10.2. Частотные характеристики импульсных систем

Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой импульсной системы (рис. 10.10) определяется

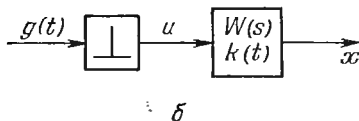
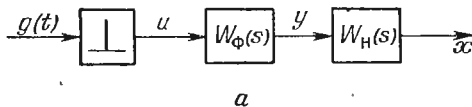


Рис. 10.10

аналогично обыкновенной линейной системе. На вход подается сигнал

$$g(t) = \sin \omega t.$$

Он преобразуется в решетчатую функцию

$$g[n] = \sin \bar{\omega} n, \quad (10.15)$$

так как в дискретных точках $t = nT$. Здесь введено обозначение $\bar{\omega} = \omega T$ — безразмерная частота.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика определяется в виде

$$W^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) = W^*(q, \varepsilon)|_{q=j\bar{\omega}}. \quad (10.16)$$

Отсюда паходятся амплитудная частотная характеристика

$$A^*(\bar{\omega}, \varepsilon) = |W^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)|$$

и фазовая частотная характеристика

$$\varphi^*(\bar{\omega}, \varepsilon) = \arg W^*(j\bar{\omega}, \varepsilon).$$

В соответствии с формулой (10.5) получаем

$$W^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} W(j(\bar{\omega} + 2\pi r)) e^{j(\bar{\omega} + 2\pi r)\varepsilon}, \quad (10.17)$$

а по формуле (10.6)

$$W^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} k[n, \varepsilon] e^{-j\bar{\omega}n}. \quad (10.18)$$

Последнее является дискретным преобразованием Фурье.

Рассмотрим *свойства частотных характеристик* импульсных систем.

1. Кроме зависимости от $\bar{\omega}$, характеристики зависят от ε . Графически это выражается в виде серии кривых $W^*(j\bar{\omega})$ для разных значений ε . Обычно бывает достаточно одной характеристики $W^*(j\bar{\omega})$ при $\varepsilon = 0$.

2. В соответствии с периодичностью передаточной функции $W^*(q, \varepsilon)$ (см. рис. 10.3) амплитудно-фазовая частотная характеристика $W^*(j\bar{\omega})$ также будет периодической с периодом 2π . Поэтому она полностью определяется своими значениями в интервале

$$-\pi < \bar{\omega} \leq \pi. \quad (10.19)$$

Смысл этого положения следующий. Пусть на вход разомкнутой цепи импульсной системы поступает сигнал

$$g(t) = \sin \omega t.$$

Тогда согласно рис. 10.10

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \sin \omega nT.$$

Пусть теперь

$$g(t) = \sin(\omega + r\omega_0)t, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где ω_0 — частота кваптования (частота следования импульсов).

Тогда

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \sin\left(\omega nT + r \frac{2\pi}{T} nT\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \sin \omega nT, \end{aligned}$$

т. е. при частоте $\omega + r\omega_0$ получается тот же результат, что и при ω . Это и приводит к периодичности частотных характеристик импульсных систем.

3. Если представить $W^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)$ в виде

$$W^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) = U^*(\bar{\omega}, \varepsilon) + jV^*(\bar{\omega}, \varepsilon),$$

то вещественная частотная характеристика $U^*(\bar{\omega}, \varepsilon)$ будет четной функцией $\bar{\omega}$, а мнимая частотная характеристика $V^*(\bar{\omega}, \varepsilon)$ — нечетной. Это вытекает из свойства дискретного преобразования Фурье (10.18), согласно которому

$$W^*(-j\bar{\omega}) = \overline{W^*(j\bar{\omega})}.$$

Поэтому вместо (10.10) достаточно рассматривать интервал изменения безразмерной частоты $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$.

4. В крайних точках интервала $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$ согласно (10.18), амплитудно-фазовая частотная характеристика принимает вещественные значения

$$\begin{aligned} W^*(j0, \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} k[n, \varepsilon], \\ W^*(j\pi, \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n k[n, \varepsilon]. \end{aligned} \tag{10.20}$$

5. При уменьшении периода следования импульсов T , т. е. при увеличении частоты квантования $\omega_0 = 2\pi/T$, частотные характеристики импульсных систем приближаются к частотным характеристикам непрерывных систем. При этом интервал $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$, который для реальной частоты $\omega = \bar{\omega}/T$ имеет вид

$$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T},$$

растягивается на всю мнимую ось $j\omega$ при $T \rightarrow 0$.

Перейдем к нахождению частотных характеристик импульсных систем. В простых случаях это можно сделать непосредственно аналитически, а в случаях сложных — приближенными численными методами или графическими способами.

Приведем сначала простые примеры.

Пример 1. Построить амплитудно-фазовую частотную характеристику импульсной системы (рис. 10.10, б), если

$$W(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}.$$

Для этого случая передаточная функция импульсной системы была получена в примере 1 § 10.1. Подставив в нее $q = j\bar{\omega}$, получим

$$W^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) = \frac{k_1}{T_1} \frac{e^{j\bar{\omega}}}{e^{j\bar{\omega}} - e^{-\beta}} e^{-\beta\varepsilon}, \quad \beta = \frac{T}{T_1}.$$

При $\varepsilon = 0$ имеем

$$W^*(j\bar{\omega}) = \frac{k e^{j\bar{\omega}}}{e^{j\bar{\omega}} - e^{-\beta}}, \quad k = \frac{k_1}{T_1}. \quad (10.24)$$

Заметим, что уравнением

$$z = e^{j\bar{\omega}} \quad (-\pi < \bar{\omega} \leq \pi)$$

описывается единичная окружность. Поэтому и функция $W^*(j\bar{\omega})$, как дробно-рациональная функция от $z = e^{j\bar{\omega}}$, отобразит ее также в окружность (или в прямую). При изменении $\bar{\omega}$ в интервале $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$ получим полуокружность, причем в крайних точках $\bar{\omega} = 0$ и $\bar{\omega} = \pi$, согласно

(10.21), имеем

$$W^*(j0) = \frac{k}{1 - e^{-\beta}}, \quad W^*(j\pi) = \frac{k}{1 + e^{-\beta}}.$$

Абсцисса центра окружности

$$\frac{W^*(j0) + W^*(j\pi)}{2} = \frac{k}{1 - e^{-2\beta}},$$

что и показано на рис. 10.11. С уменьшением величины $\beta = T/T_1$ радиус окружности увеличивается, как изображено пунктиром на рис. 10.11.

Пример 2. Построить амплитудно-фазовую частотную характеристику для импульсной системы (рис. 10.10, а),

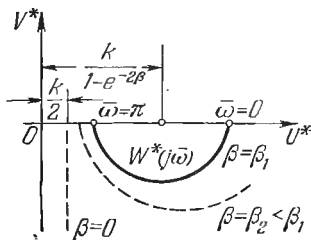


Рис. 10.11

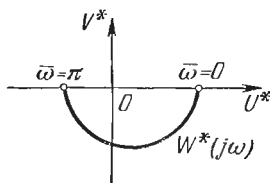


Рис. 10.12

если передаточная функция непрерывной части

$$W_H(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1},$$

а формирователь импульсов дает прямоугольные импульсы γT ($0 < \gamma < 1$). Подставляя $q = j\bar{\omega}$ в выражение передаточной функции W^* такой импульсной системы, полученное в примере 2 § 10.1, находим (при $\varepsilon = 0$)

$$W^*(j\bar{\omega}) = k_1 e^{-\beta} \frac{e^{\beta\gamma} - 1}{e^{j\bar{\omega}} - e^{-\beta}}, \quad \beta = \frac{T}{T_1}.$$

Это также будет полуокружность (при $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$), причем в крайних точках

$$W^*(j0) = k_1 e^{-\beta} \frac{e^{\beta\gamma} - 1}{1 - e^{-\beta}}, \quad W^*(j\pi) = -k_1 e^{-\beta} \frac{e^{\beta\gamma} - 1}{1 + e^{-\beta}},$$

что и показано на рис. 10.12.

Для построения частотных характеристик более сложных импульсных систем приведем два способа.

Численный способ. Пусть дана $W(s)$. Согласно (10.17) при $\varepsilon = 0$ имеем

$$W^*(j\bar{\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} W(j(\bar{\omega} + 2\pi r)).$$

Поскольку (см. § 10.1)

$$W(q) = \frac{1}{T} W(s) \Big|_{s=\frac{q}{T}}$$

то можно записать

$$W(j\bar{\omega}) = \frac{1}{T} W(j\omega).$$

Следовательно,

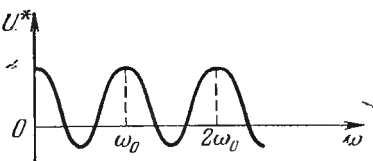
$$W^*(j\bar{\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W(j(\omega + r\omega_0)),$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$ — частота квантования.

Поэтому, заменив слева $\bar{\omega} = \omega T$, получим

$$W^*(j\omega T) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W(j(\omega + r\omega_0)). \quad (10.22)$$

Если дана $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$, то для частотной характеристики импульсной системы $W^*(j\omega T) = U^*(j\omega) + jV^*(j\omega)$ находим выражения



$$U^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} U(\omega + r\omega_0), \quad (10.23)$$

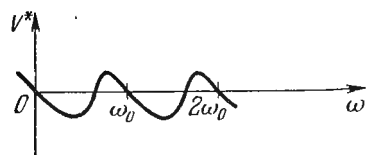


Рис. 10.13

$$V^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} V(\omega + r\omega_0).$$

При вычислениях ограничиваются конечным числом слагаемых. В результате получаются вещественная и мнимая частотные характеристики вида, изображенного на рис. 10.13.

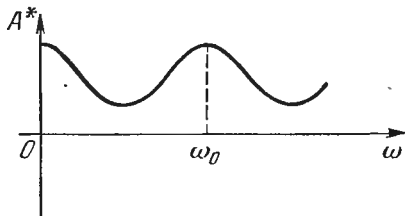
На основе этих характеристик можно найти амплитудную и фазовую частотные характеристики импульсной

системы, а именно

$$A^*(\omega) = \sqrt{U^{*2}(\omega) + V^{*2}(\omega)},$$

$$\varphi^*(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V^*(\omega)}{U^*(\omega)},$$

примерное очертание которых дано на рис. 10.14. Как уже говорилось выше (свойство 5), с увеличением ω_0 эти характеристики приближаются к характеристикам непрерывной системы, причем при $\omega_0 \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow 0$) первый минимум A^* уходит вдоль оси ω в бесконечность и асимптотически стремится к нулю.



Графический способ. Согласно формуле (10.17) при $\varepsilon = 0$ получаем

$$W^*(j\bar{\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} W(j(\bar{\omega} + 2\pi r)).$$

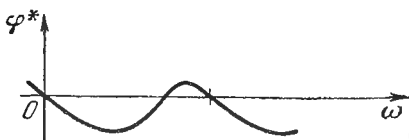


Рис. 10.14

Возьмем только три слагаемых: $r = -1; 0; +1$. Тогда

$$W^*(j\bar{\omega}) \approx W(j(\bar{\omega} - 2\pi)) + W(j\bar{\omega}) + W(j(\bar{\omega} + 2\pi)). \quad (10.24)$$

Будем считать, что задана амплитудно-фазовая частотная характеристика $W(j\omega)$ приведенной непрерывной части импульсной системы (рис. 10.10) в виде, изображенном на рис. 10.15, а. Обозначим на ней безразмерные значения частот $\bar{\omega} = \omega T$.

Возьмем одно какое-либо значение $\bar{\omega}$ ($0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$). Вектор 1 на рис. 10.15, а обозначает $W(j\bar{\omega})$. К нему согласно (10.24) надо прибавить вектор $W(j(\bar{\omega} - 2\pi))$. Но $\bar{\omega} - 2\pi < 0$. Поэтому возьмем положительное значение $2\pi - \bar{\omega}$ (рис. 10.15, а) и, имея в виду, что

$$W(-j\bar{\omega}) = \overline{W(j\bar{\omega})},$$

изобразим сопряженный вектор 2 (рис. 10.15, а), соответствующий слагаемому $W(j\bar{\omega} - 2\pi)$. Там же показан и третий вектор $W(j(\bar{\omega} + 2\pi))$.

Сложив геометрически эти три вектора получим согласно (10.24) одну точку искомой характеристики $W^*(j\bar{\omega})$ (рис. 10.15, б). Проделав тоже самое для ряда

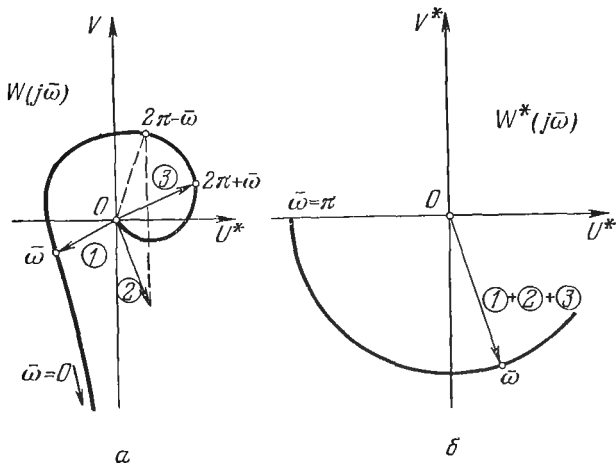


Рис. 10.15

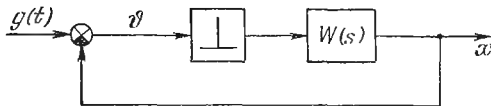


Рис. 10.16

точек $\bar{\omega}$ в интервале $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$, найдем характеристику $W^*(j\bar{\omega})$.

Для замкнутой импульсной системы (рис. 10.16) в соответствии с формулой (10.9) получаем характеристику

$$\Phi^*(j\bar{\omega}) = \frac{W^*(j\bar{\omega})}{1 + W^*(j\bar{\omega})}.$$

Представив ее в виде

$$\Phi^*(j\bar{\omega}) = P^*(\bar{\omega}) + jQ^*(\bar{\omega})$$

или

$$\Phi^*(j\bar{\omega}) = A_s^*(\bar{\omega}) e^{j\varphi_s(\bar{\omega})},$$

можно по тем же формулам и номограммам, что и в § 2.4, определить вещественную $P^*(\bar{\omega})$, мнимую $Q^*(\bar{\omega})$,

амплитудную $A_s^*(\bar{\omega})$ и фазовую $\varphi_s^*(\bar{\omega})$ частотные характеристики замкнутой импульсной системы по заданной $W^*(j\bar{\omega})$.

§ 10.3. Логарифмические частотные характеристики

Для удобства построения логарифмических частотных характеристик необходимо, во-первых, привести выражение амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой цепи импульсной системы $W^*(j\bar{\omega})$ к дробно-рациональной форме, и, во-вторых, сделать так, чтобы изменение аргумента определялось не интервалом $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$, а всей положительной осью, как в обычных логарифмических характеристиках.

Первая операция, как это ясно из § 10.1, осуществляется заменой (10.7), т. е. переходом от дискретного преобразования Лапласа к $\mathcal{Z}$ -преобразованию. Итак, полагаем,

$$e^q = z.$$

Но при этом мнимая ось $q = j\bar{\omega}$ при $-\pi \leq \bar{\omega} \leq \pi$ (рис. 10.3) отображается в окружность (рис. 10.4):

$$z = e^{j\bar{\omega}}. \quad (10.25)$$

Поэтому необходима вторая операция (распространение аргумента на всю мнимую ось). Это осуществляется при помощи w -преобразования. Простое w -преобразование имеет вид

$$w = \frac{z-1}{z+1}, \quad z = \frac{1+w}{1-w}.$$

Но здесь удобнее использовать *модифицированное w -преобразование*

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}, \quad z = \frac{1 + \frac{T}{2} w}{1 - \frac{T}{2} w}. \quad (10.26)$$

При этом окружность (10.25) отображается в мнимую ось плоскости w , так как

$$w = \frac{2}{T} \frac{e^{j\bar{\omega}} - 1}{e^{j\bar{\omega}} + 1} = \frac{2}{T} j \operatorname{tg} \frac{\bar{\omega}}{2}.$$

Обозначим

$$\omega^* = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\bar{\omega}}{2}. \quad (10.27)$$

Величина ω^* называется *псевдочастотой*. Видно, что при $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$ имеем $0 \leq \omega^* \leq \infty$, что и требовалось. На рис. 10.17 показано отображение плоскости z в плоскость

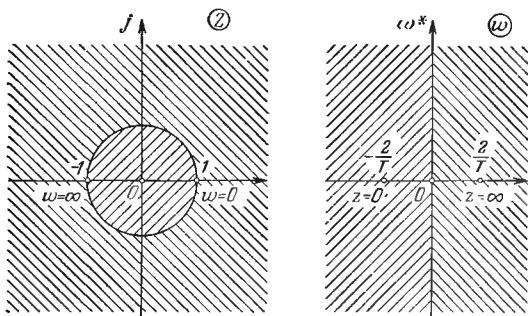


Рис. 10.17

w . Внутренность единичного круга плоскости z отображается в левую полуплоскость w .

Возможны два случая. Если $W_z^*(z, \varepsilon)$ или $W^*(q, \varepsilon)$ известна, то подстановкой (10.26) или

$$e^q = \frac{1 + \frac{T}{2} w}{1 - \frac{T}{2} w} \quad (10.28)$$

можно определить передаточную функцию разомкнутой цепи через w -преобразование, т. е. $W_w^*(w, \varepsilon)$.

Если же $W_z^*(z, \varepsilon)$ или $W^*(q, \varepsilon)$ не задана, то можно определить $W_w^*(w, \varepsilon)$ непосредственно по передаточной функции приведенной непрерывной части $W(s)$, используя выражение и таблицы $\mathcal{D}_w$ -преобразования. А именно, при $\varepsilon = 0$ имеем

$$W_w^*(w) = \overline{\mathcal{D}}_w \left\{ \frac{1 - e^{-q}}{q} W(q) \right\}, \quad (10.29)$$

где индекс w означает замену (10.28).

Подстановка значения $w = j\omega^*$ в выражение $W_w^*(w)$ даст амплитудно-фазовую характеристику импульсной

$$W_w^*(j\omega^*), \quad \omega^* = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\bar{\omega}}{2}, \quad \bar{\omega} = T\omega.$$

Как видно отсюда, при небольших значениях ω^* приближенно выполняется следующее равенство:

$$\omega^* \approx \frac{\bar{\omega}}{T} = \omega,$$

т. е. масштаб мнимой оси $j\omega^*$ плоскости w вблизи начала ($\omega^* \rightarrow 0$) приблизительно совпадает с масштабом $j\omega$ плоскости s передаточной функции приведенной непрерывной части.

Далее логарифмические частотные характеристики получают обычным способом

$$\operatorname{Lm}^*(\omega^*) = 20 \lg |W_w^*(j\omega^*)|, \quad \varphi^*(\omega^*) = \arg W_w^*(j\omega^*).$$

Приведем примеры.

Пример 1. В первом примере § 10.1 при $\varepsilon = 0$ передаточная функция разомкнутой цепи имела вид

$$W^*(q) = \frac{k_1}{T_1} \frac{e^q}{e^q - e^{-\beta}}.$$

Подстановка (10.28) дает

$$W_w(w) = \frac{k_1}{T_1} \frac{1 + \frac{T}{2} w}{1 + \frac{T}{2} w - e^{-\beta} \left(1 - \frac{T}{2} w\right)} = k' \frac{1 + \frac{T}{2} w}{1 + T' w},$$

где

$$k' = \frac{k_1}{T_1(1 - e^{-\beta})}, \quad T' = \frac{T}{2} \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}}, \quad \beta = \frac{T}{T_1}.$$

Подставив $w = j\omega^*$, получим

$$W_w^*(j\omega^*) = k' \frac{1 + \frac{T}{2} j\omega^*}{1 + T' j\omega^*},$$

откуда

$$\begin{aligned} \operatorname{Lm}^*(\omega^*) &= 20 \lg k' + 20 \lg \sqrt{1 + \frac{T^2}{4} \omega^{*2}} - \\ &\quad - 20 \lg \sqrt{1 + (T')^2 \omega^{*2}}, \\ \varphi^*(\omega^*) &= \operatorname{arctg} \frac{T}{2} \omega^* - \operatorname{arctg} T' \omega^*. \end{aligned}$$

Эти логарифмические частотные характеристики показаны на рис. 10.18.

Пример 2. Для второго примера § 10.1 примем $\varepsilon = 0$, $\gamma = 1$ (соответствует цифровому устройству, см. § 9.4). В этом случае имеем

$$W^*(q) = k_1 \frac{1 - e^{-\beta}}{e^q - e^{-\beta}},$$

а при подстановке (10.28)

$$W_w^*(w) = k_1 \frac{(1 - e^{-\beta}) \left(1 - \frac{T}{2} w\right)}{1 + \frac{T}{2} w - e^{-\beta} \left(1 - \frac{T}{2} w\right)} = k_1 \frac{1 - \frac{T}{2} w}{1 + T' w}.$$

Отсюда после подстановки $w = j\omega^*$ находим

$$\begin{aligned} \text{Lm}^*(\omega^*) &= 20 \lg k_1 + 20 \lg \sqrt{1 + \frac{T^2}{4} \omega^{*2}} - \\ &\quad - 20 \lg \sqrt{1 + (T')^2 \omega^{*2}}, \\ \varphi^*(\omega^*) &= \arctg \left(-\frac{T}{2} \omega^* \right) - \arctg T' \omega^*. \end{aligned}$$

Амплитудная логарифмическая частотная характеристика сохраняет прежний вид (рис. 10.18), а фазовая изменяется.

Пример 3. Задана передаточная функция приведенной непрерывной части

$$W(s) = \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)}.$$

Разложим $W(s)$ на простейшие дроби

$$W(s) = \frac{k_1}{s} - \frac{k_1 T_1}{T_1 s + 1}.$$

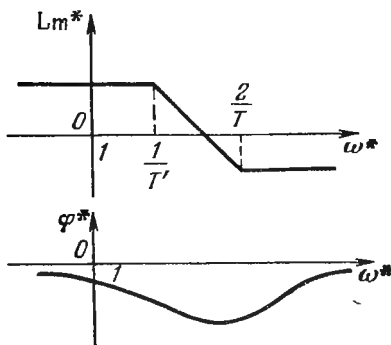


Рис. 10.18

Используя формулу (10.29) по таблице $\mathcal{D}_w$ -преобразования получаем

$$\begin{aligned} W_w^*(w) &= \\ &= \frac{k_1 \left(1 - \frac{T}{2} w\right)}{w} - \frac{k_1 T_1 \left(1 - \frac{T}{2} w\right)}{1 + T' w} = \frac{k_1 \left(1 - \frac{T}{2} w\right) (1 + T_2 w)}{w (1 + T' w)}. \end{aligned}$$

где

$$T_2 = T' - T, \quad T' = \frac{T}{2} \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}}, \quad \beta = \frac{T}{T'}.$$

Если задано $T_1 = 0,1$; $k_1 = 100$ и период чередования импульсов $T = 0,1$, то получим $T' = 0,11$ и $T_2 = 0,01$. Подставив $\omega = j\omega^*$, найдем

$$W_w^*(j\omega^*) = 100 \frac{(1 - 0,05j\omega^*)(1 + 0,01j\omega^*)}{j\omega^*(1 + 0,11j\omega^*)}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \text{Lm}^*(\omega^*) = & 40 - 20 \lg \omega^* + 20 \lg \sqrt{1 + 0,05^2 \omega^{*2}} + \\ & + 20 \lg \sqrt{1 + 0,01^2 \omega^{*2}} - 20 \lg \sqrt{1 + 0,11^2 \omega^{*2}}, \end{aligned}$$

$$\varphi^*(\omega^*) = -\frac{\pi}{2} - \arctg 0,05\omega^* + \arctg 0,01\omega^* - \arctg 0,11\omega^*.$$

Соответствующие графики логарифмических частотных характеристик изображены на рис. 10.19. Для сравнения там же показана амплитудная логарифмическая

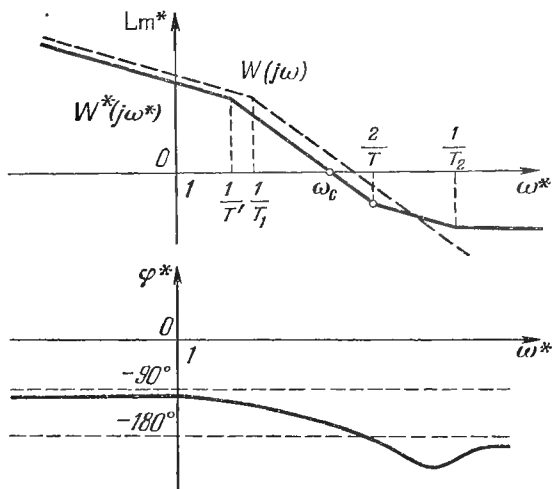


Рис. 10.19

частотная характеристика приведенной непрерывной части $W(s)$. Видно, что для небольших частот ($\omega \leq \omega_c$) они близки друг к другу, о чем указывалось выше. Это свойство сохраняет силу и для более сложных импульсных систем. Поэтому здесь можно применять известные частотные методы синтеза корректирующих устройств.

§ 10.4. Устойчивость импульсных систем

Динамика переходного процесса в замкнутой линейной импульсной системе может быть описана разностными уравнениями первого порядка в виде

$$\begin{aligned} x_1[n+1] &= a_{11}x_1[n] + \dots + a_{1m}x_m[n], \\ x_2[n+1] &= a_{21}x_1[n] + \dots + a_{2m}x_m[n], \\ &\vdots \\ x_m[n+1] &= a_{m1}x_1[n] + \dots + a_{mm}x_m[n], \end{aligned}$$

где n — безразмерное время, выражаемое порядковым номером импульсов ($n = 1, 2, \dots$); m — порядок системы разностных уравнений; $x_1[n+1]$ — первая разность (аналог первой производной в дифференциальных уравнениях).

Характеристическое уравнение для этой системы записывается в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} - z & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - z & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} - z \end{vmatrix} = 0.$$

Вместо системы разностных уравнений первого порядка можно записать одно разностное уравнение высокого порядка

$$a_0x[n+m] + a_1x[n+m-1] + \dots + a_{m-1}x[n+1] + a_mx[n] = 0$$

с характеристическим уравнением

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m = 0. \quad (10.30)$$

Импульсная система будет устойчивой (асимптотически), если $x[n] \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Решение разностного уравнения (когда корни простые) имеет вид

$$x[n] = \sum_{i=1}^m C_i z_i^n = \sum_{i=1}^m C_i e^{q_i n} \quad (10.31)$$

где z_i — корни характеристического уравнения ($i = 1, 2, \dots, m$) и

$$q_i = \ln z_i, \quad z_i = e^{q_i},$$

причем q_i являются полюсами передаточной функции замкнутой импульсной системы $\Phi^*(q)$.

Из решения (10.31) видно, что для *устойчивости* импульсной системы необходимо и достаточно, чтобы были все $|z_i| < 1$. Если хотя бы один корень $|z_i| > 1$, система

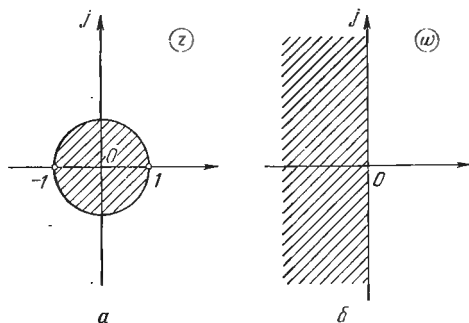


Рис. 10.20

будет неустойчивой. Значением какого-либо корня $|z_i| = 1$ при всех остальных $|z_i| < 1$ определяется *граница устойчивости* импульсной системы.

Следовательно, геометрически область устойчивости системы на плоскости корней z изобразится единичным кругом (рис. 10.20, а).

Если применить w -преобразование

$$w = \frac{z-1}{z+1}, \quad z = \frac{1+w}{1-w}, \quad (10.32)$$

то этот круг отобразится в левую полуплоскость w (рис. 10.20, б).

Подставив (10.32) в характеристическое уравнение импульсной системы (10.30), получим

$$a_0 \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^m + a_1 \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^{m-1} + \dots + a_{m-1} \frac{1+w}{1-w} + a_m = 0,$$

что приводится к виду

$$b_0 w^m + b_1 w^{m-1} + \dots + b_{m-1} w + b_m = 0. \quad (10.33)$$

Все корни z_i уравнения (10.30), лежащие внутри единичного круга (рис. 10.20, а), перейдут в левую полуплоскость w (рис. 10.20, б). Поэтому при использовании преобразованного характеристического уравнения (10.33) для устойчивости импульсной системы необходимо и до-

статочны, чтобы все корни w_i ($i = 1, 2, \dots, m$) имели отрицательные вещественные части. Границей устойчивости будет случай попадания какого-либо корня w_i на мнимую ось, когда все остальные w_i лежат слева от нее.

Приведем пример. Исследуем уравнение

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0. \quad (10.34)$$

Произведя замену переменных согласно (10.32), а именно

$$a_0(1+w)^2 + a_1(1+w)(1-w) + a_2(1-w)^2 = 0,$$

получим

$$b_0 w^2 + b_1 w + b_2 = 0, \quad (10.35)$$

где

$$b_0 = a_0 + a_2 - a_1, \quad b_1 = 2(a_0 - a_2), \quad b_2 = a_0 + a_1 + a_2.$$

Условием устойчивости такой системы будет положительность коэффициентов уравнения (10.35). Но это условие нельзя применять к исходному уравнению (10.34). В самом деле, пусть $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 10$.

Тогда $b_0 = 8$, $b_1 = -18$, $b_2 = 14$. Поскольку не выполнено необходимое условие устойчивости для уравнения (10.35) — положительность коэффициентов, — то данная система будет неустойчивой, хотя исходное уравнение (10.34) имеет все положительные коэффициенты.

Вычислим, какие при этом корни будет иметь исходное уравнение (10.34)

$$z^2 + 3z + 10 = 0, \quad z_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm j \sqrt{10 - \frac{9}{4}}.$$

Для устойчивости требуется $|z_{1,2}| < 1$, а здесь

$$|z_{1,2}| = \sqrt{\frac{9}{4} + 10 - \frac{9}{4}} = \sqrt{10} > 1,$$

т. е. система с данными коэффициентами характеристического уравнения действительно неустойчива.

Для исследования устойчивости импульсных систем можно пользоваться критерием Гурвица (§ 4.2) применительно к преобразованному характеристическому уравнению (10.33). Это последнее позволяет также использовать и критерий Михайлова в его обычной формулировке (§ 4.3).

Однако существует еще *аналог критерия Михайлова*, который позволяет исследовать устойчивость импульсной

системы непосредственно по исходному характеристическому уравнению (10.30), не преобразовывая его.

Вывод такого критерия делается аналогично выводу критерия Михайлова (§ 4.3), но в другой комплексной плоскости, следующим образом.

Согласно принципу аргумента число корней многочлена

$$H(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m, \quad (10.36)$$

лежащих внутри единичного круга, можно определить по числу полных оборотов вектора $H(z)$ при изменении z вдоль границы этого круга, т. е. при

$$z = e^{j\bar{\omega}}, \quad -\pi < \bar{\omega} \leq \pi.$$

Следовательно, если все m корней характеристического многочлена (10.36) лежат внутри единичного круга, то

$$\Delta \arg H(e^{j\bar{\omega}}) = 2\pi m, \quad -\pi < \bar{\omega} \leq \pi.$$

Это условие необходимое и достаточное для устойчивости импульсной системы.

Поскольку известно свойство

$$H(e^{-j\bar{\omega}}) = \overline{H(e^{j\bar{\omega}})},$$

то достаточно рассмотреть интервал $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$ и потребовать, чтобы

$$\Delta \arg H(e^{j\bar{\omega}}) = \pi m, \quad 0 \leq \bar{\omega} \leq \pi. \quad (10.37)$$

Это и является аналогом критерия устойчивости Михайлова для импульсных систем.

Подстановка $z = e^{j\bar{\omega}}$ в (10.36) дает

$$H(e^{j\bar{\omega}}) = a_0 e^{jm\bar{\omega}} + a_1 e^{j(m-1)\bar{\omega}} + \dots + a_{m-1} e^{j\bar{\omega}} + a_m, \quad (10.38)$$

причем в крайних точках $\bar{\omega} = 0$ и $\bar{\omega} = \pi$ имеем

$$H(e^{j0}) = \sum_{i=0}^m a_i, \quad H(e^{j\pi}) = \sum_{j=1}^m (-1)^{m-i} a_i.$$

По выражению (10.38) строится аналог кривой Михайлова, причем в этом выражении выделяются вещественная и мнимая части:

$$H(e^{j\bar{\omega}}) = X^*(\bar{\omega}) + jY^*(\bar{\omega}).$$

Для устойчивости импульсной системы, например, при $m=3$ аналог кривой Михайлова имеет вид, изображенный на рис. 10.21, а; для неустойчивой системы при $m=3$ — вид, изображенный на рис. 10.21, б. Из этого примера хорошо видна специфика очертания аналога кривой

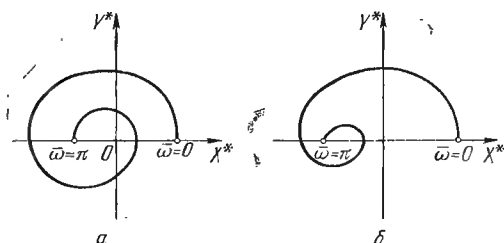


Рис. 10.21

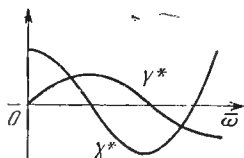


Рис. 10.22

Михайлова для импульсных систем по сравнению с непрерывными (§ 4.3).

Очевидна здесь и *другая формулировка* аналога критерия Михайлова — перемежаемость корней $X^*(\bar{\omega})$ и $Y^*(\bar{\omega})$ (рис. 10.22).

Существует также и *аналог критерия устойчивости Найквиста* для импульсных систем. Дадим его вывод, аналогичный проделанному в § 4.4.

Возьмем передаточную функцию разомкнутой цепи импульсной системы

$$W^*(q, \varepsilon) = \frac{N^*(q, \varepsilon)}{L^*(q, \varepsilon)},$$

где N^* и L^* — многочлены по e^q степени k и $m > k$.

Положим

$$e^q = z, \quad \varepsilon = 0.$$

Обозначим

$$W_z^*(z) = \frac{N_z^*(z)}{L_z^*(z)}. \quad (10.39)$$

Возьмем вспомогательную функцию

$$F(z) = 1 + W_z^*(z) = \frac{L_z^*(z) + N_z^*(z)}{L_z^*(z)} = \frac{H(z)}{L_z^*(z)}, \quad (10.40)$$

где $H(z)$ — характеристический многочлен замкнутой системы, а $L_z^*(z)$ — разомкнутой,

По аналогу критерия Михайлова в случае *устойчивой разомкнутой цепи* имеем

$$\Delta \arg L_z^* (e^{j\bar{\omega}}) = \pi m, \quad 0 \leq \bar{\omega} \leq \pi.$$

Для устойчивости же замкнутой системы требуется, чтобы

$$\Delta \arg H (e^{j\bar{\omega}}) = \pi m, \quad 0 \leq \bar{\omega} \leq \pi.$$

В результате получаем требование

$$\Delta \arg F (e^{j\bar{\omega}}) = \pi m - \pi m = 0,$$

т. е. годограф вспомогательной функции F не должен охватывать начало координат.

Отсюда, переходя согласно (10.40) к функции $W_z^*(z)$, получаем формулировку аналога критерия Найквиста: если разомкнутая цепь устойчива, то для устойчивости

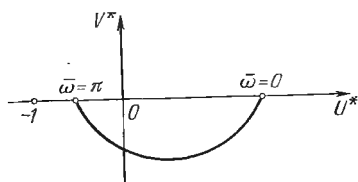


Рис. 10.23

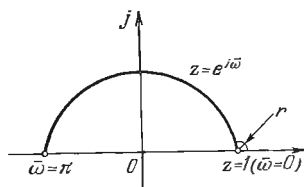


Рис. 10.24

замкнутой системы требуется, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой цепи $W_z^*(e^{j\bar{\omega}})$ не охватывала точку -1 .

Это показано на рис. 10.23 для примера 2, рассмотренного в § 10.2. Условие устойчивости здесь получает вид

$$k_1 e^{-\beta} \frac{e^{\beta\gamma} - 1}{1 + e^{-\beta}} < 1.$$

Видна существенная специфика этого условия по сравнению с условием устойчивости аналогичной непрерывной системы (§ 4.4).

В случае *нейтральной разомкнутой цепи*, т. е. при наличии в многочлене $L^*(q)$ корня $q=0$ или в $L_z^*(z)$ корня $z=1$ (рис. 10.24), нужно обходить контур, минуя точку $z=1$, по четверти окружности малого радиуса r , как показано на рисунке.

Учитывая в выражении (10.39) полюс $z = 1$, можем записать

$$W_z^*(z) = \frac{W_{1z}^*(z)}{z-1},$$

где W_{1z}^* представляет собой оставшуюся часть исходной функции после выделения в знаменателе множителя $(z-1)$, соответствующего полюсу $z = 1$.

Вместо $z = 1$ введем согласно рис. 10.24

$$z = 1 + re^{j\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

После этой подстановки получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} W_z^*(1 + re^{j\varphi}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{W_{1z}^*(1 + re^{j\varphi})}{re^{j\varphi}} = \lim R e^{-j\varphi},$$

где

$$R = \frac{W_{1z}^*(1)}{r}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика вместо рис. 10.23 принимает вид рис. 10.25, а формулировка критерия устойчивости остается прежней.

Наконец, обратимся к случаю *неустойчивой разомкнутой цепи*, когда передаточная функция $W_z^*(z)$ содержит p полюсов вне единичного круга. Тогда в выражениях (10.39) и (10.40) по принципу аргумента

$$\Delta \arg L_z^*(e^{j\bar{\omega}}) = \pi(m - p),$$

$$0 \leq \bar{\omega} \leq \pi,$$

Рис. 10.25

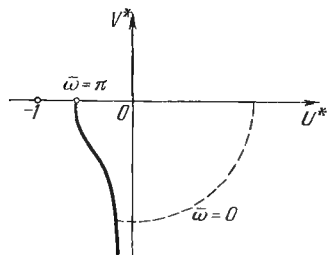
а для устойчивости замкнутой системы, по-прежнему, требуется

$$\Delta \arg H(e^{j\bar{\omega}}) = \pi m, \quad 0 \leq \bar{\omega} \leq \pi.$$

Поэтому изменение аргумента выражения (10.40) должно удовлетворять соотношению

$$\Delta \arg F(e^{j\bar{\omega}}) = \pi m - \pi(m - p) = \pi p.$$

Следовательно, для устойчивости замкнутой системы при неустойчивой разомкнутой цепи требуется, чтобы



апплицидно-фазовая характеристика разомкнутой цепи охватывала точку -1 на угол $p\pi$ (против часовой стрелки), где p — число полюсов $W_z^*(z)$, лежащих вне единичного круга $z = e^{j\omega}$.

Пример показан на рис. 10.26 для случая $p = 2$.

Наконец, для исследования устойчивости импульсных систем могут применяться также логарифмические частотные характеристики. Получение их применительно к импульсным системам рассмотрено выше в § 10.3. Формулировка частотного критерия устойчивости здесь остается той же, что и для непрерывных систем (§ 4.4), но надо иметь в виду некоторое своеобразие очертания самих характеристик (§ 10.3).

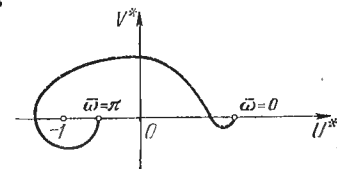


Рис. 10.26

§ 10.5. Точность и коррекция импульсных систем

Как и для непрерывных систем (гл. 3), введем здесь определение статической ошибки, астатизма и коэффициентов ошибок, а также ошибок при гармоническом воздействии. Ошибку импульсной системы мы условились обозначать ϑ (см. рис. 10.5).

Имея в виду, что передаточная функция замкнутой системы для ошибки равна

$$\Phi_{\vartheta z}^*(z) = \frac{1}{1 + W_z^*(z)}, \quad (10.41)$$

установившуюся ошибку ϑ_{yc} при постоянной величине внешнего воздействия $g(\bar{t}) = g_0$ можно вычислить по формуле

$$\vartheta_{yc} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{g_0 z}{1 + W_z^*(z)} = \frac{g_0}{1 + W_z^*(1)}. \quad (10.42)$$

Это и будет *статическая ошибка* импульсной системы $\vartheta_{ст}$.

Астатической импульсной системой будет такая, у которой передаточная функция разомкнутой цепи имеет полюс $z = 1$ ($q = 0$), т. е.

$$W_z^*(z) = \frac{W_0^*(z)}{z - 1},$$

где $W_0^*(z)$ не имеет полюсов в точке $z=1$. Передаточная функция замкнутой системы по ошибке в этом случае будет

$$\Phi_{\vartheta z}^*(z) = (z-1) \Phi_{\vartheta 0}^*(z), \quad (10.43)$$

где

$$\Phi_{\vartheta 0}^*(z) = \frac{1}{W_0^*(z) + z - 1}$$

является функцией, не имеющей нулей при $z=1$. В такой астатической системе при внешнем воздействии вида $g(\bar{t}) = g_0 + g_1 \bar{t}$ установившаяся ошибка получит выражение

$$\vartheta_{yc} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z(z-1)g_0 + g_1 z}{W_0^*(z) + z - 1} = \frac{g_1}{W_0^*(1)}. \quad (10.44)$$

Это постоянная величина *скоростной ошибки* $\vartheta_{ск}$ астатической системы. Статическая же ошибка отсутствует.

Аналогично получается дважды астатическая импульсная система, если передаточная функция разомкнутой цепи этой системы имеет двойной полюс в точке $z=1$ ($q=0$). Тогда появится постоянная ошибка только по ускорению изменения внешнего воздействия $g(\bar{t})$.

Надо иметь в виду, что в импульсных системах могут возникать малые колебания внутри периода повторения сигнала в установившемся режиме.

Определим *коэффициенты ошибок* для импульсной системы аналогично тому, как это делалось для непрерывных систем (§ 3.4).

Разложим в ряд Тейлора передаточную функцию замкнутой импульсной системы для ошибки в окрестности точки $z=1$:

$$\Phi_{\vartheta z}^*(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{c_h}{h!} (z-1)^h,$$

где

$$c_h = \left. \frac{d^h \Phi_{\vartheta z}^*(z)}{dz^h} \right|_{z=1} = \sum_{m=0}^{\infty} m^h (-1)^h k_{\vartheta}[m]. \quad (10.45)$$

Здесь $k_{\vartheta}[m]$ при $m=n$ есть весовая функция системы по ошибке. Так определяются коэффициенты ошибок $c_0, c_1, c_2, \dots$ При этом, например, первые три коэффи-

ента имеют вид

$$c_0 = \Phi_{\vartheta z}^*(1) = \sum_{m=0}^{\infty} k_{\vartheta}[m],$$

$$c_1 = \left. \frac{d\Phi_{\vartheta z}^*(z)}{dz} \right|_{z=1} = - \sum_{m=0}^{\infty} m k_{\vartheta}[m],$$

$$c_2 = \left. \frac{d^2\Phi_{\vartheta z}^*(z)}{dz^2} \right|_{z=1} = \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) k_{\vartheta}[m].$$

Передаточная функция импульсной системы согласно формулам (10.41) и (10.39) имеет вид отношения многочленов

$$\Phi_{\vartheta z}^*(z) = \frac{L_z^*(z)}{L_z^*(z) + N_z^*(z)}.$$

Поэтому вместо разложения в ряд Фурье те же коэффициенты c_k можно получить путем деления многочлена числителя на знаменатель. Этот способ и рекомендуется использовать как более простой для практических расчетов.

Чтобы определить выражение для ошибки с использованием этих коэффициентов, обратимся к формуле (10.3), записав ее в виде

$$\vartheta_{yc}[n] = \sum_{m=0}^n g[n-m] k_{\vartheta}[m]. \quad (10.46)$$

Фигурирующую здесь решетчатую функцию $g[n-m]$ выразим через ее разности соответствующего порядка для разных значений m :

$$\begin{aligned} g[n-1] &= g[n] - \Delta g[n-1], \\ g[n-2] &= g[n] - 2\Delta g[n-1] + \Delta^2 g[n-2], \\ g[n-3] &= g[n] - 3\Delta g[n-1] + 3\Delta^2 g[n-2] - \Delta^3 g[n-3], \\ &\dots \end{aligned}$$

Подставив их в выражение (10.46), после выкладок получаем

$$\vartheta_{yc}[n] = \sum_{k=0}^m \frac{c_k}{k!} \Delta^k g[n-k], \quad (10.47)$$

где c_k определяются формулой (10.45).

Например, если

$$g[n] = a_0 + a_1 n + a_2 n^2, \quad (10.48)$$

то соответствующие разности будут

$$\Delta g[n-1] = a_1 - a_2 + 2a_2 n,$$

$$\Delta g[n-2] = \Delta\{\Delta g[n-1]\} = \Delta\{a_1 - a_2 + 2a_2(n-1)\} = 2a_2,$$

далее $\Delta g[n-k] = 0$ при всех $k \geq 3$. С этими значениями разностей формула (10.47) дает

$$\vartheta_{yc}[n] = n^2 c_0 a_2 + \\ + n(c_0 a_1 + 2a_2 c_1) + c_0 a_0 + c_1(a_1 - a_2) + c_2 a_2. \quad (10.49)$$

Покажем определение коэффициентов ошибок на примере импульсной системы, имеющей передаточную функцию разомкнутой цепи

$$W_z^*(z) = \frac{1+z}{(z-1)(1+z+z^2)}, \quad (10.50)$$

если внешнее воздействие имеет вид $g(\bar{t}) = 1 + \bar{t} + \frac{\bar{t}^2}{2}$.

Найдем передаточную функцию замкнутой системы для ошибки

$$\Phi_{\vartheta z}^*(z) = \frac{1}{1+W_z^*(z)} = \frac{(z-1)(z^2+2z+3)}{(z-1)(z^2+2z+3)+z+1}.$$

Для деления числителя на знаменатель здесь удобно ввести замену $z-1 = \xi$. После выкладок получаем

$$\Phi_{\vartheta \xi}^*(\xi) = \frac{\xi^3 + 4\xi^2 + 6\xi}{\xi^3 + 4\xi^2 + 7\xi + 2}.$$

Деление многочленов по обычному правилу алгебры дает результат

$$\Phi_{\vartheta \xi}(\xi) = 3\xi - 8,5\xi^2 + 24,25\xi^3 + \dots$$

Отсюда следуют значения коэффициентов ошибок

$$c_0 = 0; \quad c_1 = 3; \quad c_2 = -8,5 \cdot 2! = -17;$$

$$c_3 = 24,25 \cdot 3! = 145,5; \dots$$

Внешнее воздействие нам задано в виде (10.48) при значениях $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$. Тогда по формуле (10.49) с найденными здесь коэффициентами c_i опреде-

ляем ошибку

$$\vartheta_{yc}[n] = n \cdot 2a_2c_1 + (a_1 - a_2)c_1 + a_2c_2 = 3n - 7.$$

Здесь отсутствует статическая ошибка ($c_0 = 0$), ибо передаточная функция разомкнутой цепи (10.50) имеет полюс $z = 1$ (астатическая система). В целом ошибка включает постоянную составляющую (-7) по скорости, пропорциональную времени ($3n$) по ускорению изменения внешнего воздействия.

Перейдем теперь к *ошибкам импульсной системы при гармоническом воздействии*. Внешнее синусоидальное воздействие $g(t) = a \sin \omega t$ преобразуется на входе в решетчатую функцию (10.15), а именно

$$g[n] = a \sin \bar{\omega} n.$$

При этом установившаяся ошибка в замкнутой системе будет

$$\vartheta_{yc} = A_{\vartheta} \sin(\bar{\omega} n + \varphi_{\vartheta}),$$

где

$$A_{\vartheta} = a |\Phi_{\vartheta}^*(j\bar{\omega})|, \quad \varphi_{\vartheta} = \arg \Phi_{\vartheta}^*(j\bar{\omega}). \quad (10.51)$$

Используем логарифмические частотные характеристики разомкнутой цепи, получаемые с применением w -преобразования (10.26) и (10.29), в виде

$$\text{Lm}^*(\omega^*) = 20 \lg |W_w^*(j\omega^*)|, \quad \varphi^*(\omega^*) = \arg W_w^*(j\omega^*),$$

как это было проиллюстрировано на примерах в § 10.3.

Учитывая, что аналогично рис. 3.4 обычно на рабочей частоте $|W_w^*(j\omega_p^*)| \gg 1$, получим в соответствии с формулой (10.41) следующее выражение:

$$20 \lg A_{\vartheta} = 20 \lg a - \text{Lm} |W_w^*(j\omega_p^*)|, \quad \varphi_{\vartheta} = -\arg W_w^*(j\omega_p^*).$$

Как было установлено в § 10.3, в низкочастотной области (в которой и лежит значение ω_p^*) приближенно выполняется равенство

$$\omega^* \approx \frac{\bar{\omega}}{T} = \omega, \quad (10.52)$$

т. е. имеется совпадение псевдочастоты ω^* с частотой ω передаточной функции приведенной непрерывной части импульсной системы. Поэтому для определения ошибки в этой области можно пользоваться непосредственно обычной логарифмической частотной характеристикой

приведенной непрерывной части, а именно считая, что

$$20 \lg A_{\Phi} \approx 20 \lg a - \text{Lm} |W(j\omega_p)|, \quad \varphi_{\Phi} = -\arg W(j\omega_p).$$

Следовательно, в первом приближении установившаяся ошибка импульсной системы при гармоническом воздействии (низкочастотном) может быть вычислена как установившаяся ошибка обычной непрерывной системы, получаемой замыканием отрицательной обратной связью приведенной непрерывной части этой системы.

Обратимся далее к изложению принципов *коррекции импульсных систем*. Введение в систему корректирующих устройств бывает, как мы знаем, необходимо, чтобы в результате этого система удовлетворяла заданным требованиям по точности и по качеству процессов управления, в том числе переходных процессов. Поэтому рассмотрим сначала эти требования.

Простейшим требованием является обеспечение заданного *запаса устойчивости* (т. е. определенной меры удаления от границы устойчивости). В частотных оценках это, как известно, запас по амплитуде и запас по фазе, вычисляемые точно таким же образом, как и для непрерывных систем (см. § 5.2), по частотным характеристикам импульсных систем, рассмотренным выше в данной главе.

Требование *заданной точности* может выражаться различными способами. В частотных подходах анализируется обычно гармоническое воздействие $g(t) = a_p \sin \omega_p t$. Из формулы (10.51) следует, что

$$\vartheta_{yc} \leq a_p |\Phi_{\Phi}^*(j\bar{\omega}_p)|.$$

Если задано, что ошибка не должна превышать определенного допустимого значения $\vartheta_{\text{доп}}$, то частотная характеристика системы должна удовлетворять требованию

$$|\Phi_{\Phi}^*(j\bar{\omega}_p)| < \frac{\vartheta_{\text{доп}}}{a_p}.$$

Но для рабочей частоты ω_p , расположенной в низкочастотной области, $|W^*(j\omega_p)| \ll 1$. Тогда в соответствии с (10.41) последнее условие запишется в виде требования к частотной характеристике разомкнутой цепи

$$|W^*(j\bar{\omega}_p)| > \frac{a_p}{\vartheta_{\text{доп}}}, \quad (10.53)$$

а в логарифмической форме

$$\text{Lm} | W_w^*(j\omega_p^*) | > 20 \lg \frac{a_p}{\Phi_{\text{доп}}}. \quad (10.54)$$

Связь между псевдочастотой ω^* и безразмерной частотой $\bar{\omega} = \omega T$ определяется формулой (10.27). Учитывая же, что для низкочастотной области справедливо равенство (10.52), условие (10.54) можно записать и как требование к логарифмической частотной характеристике приведенной непрерывной части системы:

$$\text{Lm} | W(j\omega_p) | > 20 \lg \frac{a_p}{\Phi_{\text{доп}}}. \quad (10.55)$$

Выбор типового гармонического воздействия $g(\bar{t}) = a_p \sin \omega_p \bar{t}$, которое следует заложить в проектирование системы, может исходить из заданных требований максимальной рабочей скорости $\dot{g}_{\text{max}}$ и ускорения $\ddot{g}_{\text{max}}$ входного воздействия, так же как и для непрерывных систем, в виде (6.18), т. е.

$$\bar{\omega}_p = \frac{\ddot{g}_{\text{max}}}{\dot{g}_{\text{max}}}, \quad a_p = \frac{\ddot{g}_{\text{max}}^2}{\dot{g}_{\text{max}}}.$$

Вычислив $\bar{\omega}_p$ и a_p по заданным $\dot{g}_{\text{max}}$ и $\ddot{g}_{\text{max}}$, реализуем затем требование (10.53), (10.54) или (10.55).

По аналогии с формулой (6.20) здесь также вводится требование к значению общего коэффициента усиления разомкнутой цепи системы $K \geq \frac{\dot{g}_{\text{max}}}{\Phi_{\text{доп}}}$ как одно из условий достижения заданной точности проектируемой системы.

Требования к *качеству переходного процесса* в импульсных системах аналогично непрерывным выражаются в допустимых значениях перерегулирования σ и времени переходного процесса t_n , которое может быть выражено в относительных единицах $n_n = \frac{t_n}{T}$, где T — период чередования импульсов.

Во многих случаях логарифмическая амплитудная частотная характеристика приведенной непрерывной части системы $\text{Lm} | W(j\omega) |$ в низкочастотной области вплоть

до частоты среза бывает близка к амплитудной частотной характеристике импульсной системы $L_m|W^*(j\omega^*)|$, как, например, на рис. 10.19. В таком случае при проектировании импульсной системы может быть использован тот же аппарат, что и для непрерывных систем, изложенный на стр. 145, по требованиям к качеству переходного процесса.

Исходя из всех перечисленных требований составляются желаемые характеристики импульсной системы. Чтобы их реально получить, в систему вводятся *корректирующие устройства*. Здесь для коррекции системы имеется большее разнообразие технических средств, чем у непрерывных систем, так как кроме непрерывных корректирующих устройств можно вводить импульсные и цифровые.

Методику синтеза корректирующих устройств для импульсных систем см. в книге В. А. Иванов, А. С. Ющенко. Теория дискретных систем автоматического управления.— М.: Наука, 1983. Мы же ограничимся кратким описанием дополнительных видов корректирующих устройств для импульсных систем, т. е. импульсных и цифровых. Что касается *непрерывной коррекции* импульсных систем, то здесь применяются все ее виды, описанные выше в главе 6, но со специфическими особенностями методики их синтеза.

Импульсная коррекция осуществляется включением в контур системы импульсного фильтра. Он преобразует входной сигнал в последовательность импульсов. Эти импульсы на выходе фильтра $y[n]$ образуются путем амплитудно-импульсной модуляции входного сигнала $x[n]$, но с необходимыми для коррекции системы преобразованиями, а именно

$$y[n] = \sum_{m=0}^n k[n-m] x[m],$$

где $k[n]$ — весовая функция приведенной непрерывной части импульсного фильтра.

В области изображений уравнение импульсного фильтра будет

$$Y^*(q) = W_k^*(q) X^*(q),$$

где

$$W_k^*(q) = D\{k[n]\}$$

есть передаточная функция корректирующего импульсного фильтра, которая представляется в виде

$$W_k^*(q) = \frac{b_0 e^{qk} + b_1 e^{q(k-1)} + \dots + b_k}{a_0 e^{qm} + b_1 e^{q(m-1)} + \dots + a_m} \quad (k < m).$$

Определение передаточной функции импульсного фильтра в форме, необходимой для реализации его непрерывной части,

$$W(q) = \bar{D}^{-1} \{W_k^*(q)\},$$

часто оказывается сложной задачей. В связи с этим прибегают к реализации импульсного фильтра с помощью специальных комбинаций непрерывных элементов. В частности, с использованием суммирующих усилителей и элементов задержки можно смоделировать разностное уравнение, описывающее проектируемый импульсный фильтр.

Иначе эти разностные уравнения импульсных фильтров можно реализовать с помощью цифрового вычислителя. Тогда входной сигнал фильтра $x(t)$ преобразуется в аналого-цифровом преобразователе, и далее решение разностного уравнения на цифровом вычислителе вводится в непрерывную часть импульсной системы через цифро-аналоговый преобразователь.

Импульсные фильтры могут применяться в качестве как последовательных, так и параллельных корректирующих устройств. Применяется также импульсная коррекция по внешнему воздействию, которая и здесь обладает теми же особыми свойствами, что и в непрерывных системах.

Для синтеза импульсных корректирующих устройств, как и прежде, удобно использовать логарифмические частотные характеристики. Но повышение качества процесса управления с помощью импульсных и цифровых фильтров может быть более всесторонним, не ограничивающимся коррекцией частотных характеристик системы.

Цифровые корректирующие фильтры осуществляются как дифференцирующие и интегрирующие. *Дифференцирующий фильтр* первого порядка реализует разностное уравнение

$$y[nT] = \frac{1}{T} \Delta x[nT],$$

Это соответствует приближенному разностному выражению производной от входной величины. Записав соотношение

$$Y^*(z) = \frac{1}{T} (z - 1) X^*(z)$$

при нулевых начальных условиях, т. е. $x[0] = 0$, получим передаточную функцию дифференцирующего цифрового фильтра первого порядка

$$W^*(z) = \frac{Y^*(z)}{X^*(z)} = \frac{z - 1}{T}.$$

Для практической реализации ее преобразуют к виду

$$W_1^*(z) = \frac{1}{T} \frac{z - 1}{z}.$$

Чтобы цифровой фильтр первого порядка более точно реализовал производную от входной величины, представляют его передаточную функцию в следующей форме:

$$W_1^*(z) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \frac{(z - 1)^k}{z^k},$$

где m — конечное число членов суммы, выбираемое из желаемой точности реализации производной.

Аналогично строится и дифференцирующий цифровой фильтр любого порядка r с передаточной функцией

$$W_r^*(z) = \frac{(z - 1)^r}{T^r z^r} \left(1 + \sum_{k=1}^m \frac{(z - 1)^k}{k! z^k} \right)^r.$$

Такие фильтры дают существенный эффект как при последовательном включении, так и в местных обратных связях. Они позволяют осуществлять также инвариантность по внешнему входному воздействию.

Интегрирующие цифровые фильтры первого порядка имитируют интеграл

$$y(t) = \int_0^t x(t) dt$$

в виде приближенного равенства

$$y[(n + 1)T] - y[nT] \approx Tx[nT],$$

что соответствует приближенному интегрированию по методу прямоугольников.

Передаточная функция такого фильтра будет

$$W_1^*(z) = \frac{T}{z-1}.$$

Поскольку решение разностного уравнения, написанного выше, дает

$$y[nT] = T \sum_{m=0}^{n-1} x[mT],$$

то такой фильтр называют накопителем.

Существует другое выражение передаточной функции интегрирующего фильтра первого порядка

$$W_1^*(z) = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1},$$

соответствующего приближенному интегрированию по методу трапеций.

Для цифрового интегрирующего фильтра второго порядка (при интегрировании по правилу Симпсона) передачная функция получает вид

$$W_2^*(z) = \frac{T}{3} \frac{z^2 + 4z + 1}{z^2 - 1}.$$

Последовательное включение интегрирующего фильтра повышает порядок астатизма системы, т. е. точность. Но, как было в непрерывных системах, при этом есть опасность ухудшить устойчивость системы. Для парирования этого недостатка применяется, как и прежде, изодромная коррекция, причем передачная функция корректирующего устройства берется в виде

$$W^*(z) = W_1^*(z) \left(k + \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} \right),$$

где k равно постоянной времени компенсирующего дифференцирующего устройства первого порядка.

Существуют еще цифровые фильтры другого типа, которые обеспечивают различные желаемые качества процессов управления в импульсной системе при тех или иных внешних воздействиях.

ТЕКСТ ПРОГРАММЫ КОРНЕВОГО МЕТОДА СИНТЕЗА КОРРЕКТИРУЮЩИХ ЦЕПЕЙ

С *****
С ПРОГРАММА ПОЗВОЛЯЕТ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ВВЕДЕН-
С ННЫМИ КОРРЕКТИРУЮЩИМИ ЦЕПЯМИ, ОПИСЫВАЕМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ
С СОСТОЯНИЙ МАТРИЦЕЙ "А", ЭЛЕМЕНТАМИ КОТОРОЙ ЯВЛЯЮТСЯ ЦЕ-
С ЛЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ
С ЧИСЛЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ И СИМВОЛИЧЕСКИЕ
С ОБОЗНАЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ЦЕПЕЙ,
С ПОЛУЧИТЬ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ХА-
С РАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И НА ОСНОВЕ ПРЯМОГО МЕТОДА
С СИНТЕЗА КОРРЕКЦИИ С А У (СМ. ЧЕРНОРУЦКИЙ Г.С., СИБИРИН
С А.П., ЖАБРЕЕВ В.С. СЛЕДЯЩИЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКИХ
С МАНИПУЛЯТОРОВ - М.: НАУКА, ГРФИЛ, 1987. - 272С.) ПРИ
С ЗАДАНИИ ЖЕЛАЕМЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
С ОПРЕДЕЛИТЬ ПАРАМЕТРЫ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ЦЕПЕЙ.
С ПРОГРАММА ТАКЖЕ ПОЗВОЛЯЕТ РАСКРЫТЬ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ
С МАТРИЦЫ С ЭЛЕМЕНТАМИ В ВИДЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ,
С ВКЛЮЧАЮЩИХ СИМВОЛИЧЕСКИЕ ИМЕНА.
С ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ПОДПРОГРАММА - "DSNEN" ИЗ ПАКЕТА
С НАУЧНЫХ ПРОГРАММ НА ФОРТРАНЕ.
С ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ - ФОРТРАН-IV;
С ОПЕРАЦИОННАЯ СИСТЕМА - ОС ЕС ВЕРСИИ 4.1 И ВЫШЕ.
С *****
С

EXTERNAL FUN

COMMON /W/ B, Z, C, N, KSC, LSC, KSZ, KBZ, KODZ, KODC
INTEGER*2 PA(10,10), KS(10,10), KSIMV(10,10,4),

P KSDM(11), LSIMV(11,100), KSR(11), KSZ(11),

1 LSMVR(11,100), KBZ(11,100), KOD(10,10,4,5),

2 LSRR(100), KODDM(100,10,11), KODRZ(100,10,11),

3 KODZ(100,10,11), KODRR(100,10), KSC(10,10),

4 LSC(10,10,100), KODC(10,10,100,9)

INTEGER INDEX(10)/1,2,3,4,5,6,7,8,9,10/, P(10)/10*0/,

P IND(10,10)/100*7/, SUMN/'*'/, KNX/0/, KE/0/,

1 LITER(20), CODPK(10), JCL(3), SIMVL4,

2 D(10)/10*1/, PD, PR, PZ, ZN

REAL A(10,10,5), DM(11,101), R(11,101), Z(11,101),

P RR(101), C(10,10,101)

REAL*8 B(10), FV(10), FD(10,10), X(10)

COMPLEX H(2), E(11), G(11), CR

EQUIVALENCE (C(1), DM(1)), (C(1112), R(1)),

P (C(2223), A(1)), (C(2723), RR(1)),

1 (KODC(1),KODDM(1)), (KODC(11001),KODRZ(1)),

2 (KODC(22001), KOD(1)), (KODC(24001),LSIMV(1)),

3 (KODC(25101),LSMVR(1)), (KODC(26201),KODRR(1)),

4 (KODC(27201),KSIMV(1)), (KODC(27601), PA(1)),

5 (KODC(27701), KS(1)), (CR, RE)

DATA JCL(1)/'DET '//, JCL(2)/'CHAR',//, JCL(3)/'SINT'//

О С Н О В Н Ы Е И Д Е Н Т И Ф И К А Т О Р Ы

- N — ПОРЯДОК СИСТЕМЫ;
 X — ВЕКТОР ИСКОМЫХ ПАРАМЕТРОВ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ЦЕПЕЙ;
 PA — МАССИВ ЧИСЛА КОЭФФИЦИЕНТОВ В ПОЛИНОМАХ ЭЛЕМЕНТОВ
 ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ;
 PD — ЧИСЛО КОЭФФИЦИЕНТОВ У ПОЛИНОМА 2-ГО СОМНОЖИТЕЛЯ,
 PR — ЧИСЛО КОЭФФИЦИЕНТОВ У ПОЛИНОМА, ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕГО
 ОЧЕРЕДНОЕ СЛАГАЕМОЕ В ВЫРАЖЕНИИ ДЛЯ РАСКРЫТИЯ
 ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ;
 PZ — ЧИСЛО КОЭФФИЦИЕНТОВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ;
 IND — МАТРИЦА ПРИЗНАКОВ РАВЕНСТВА НУЛЮ СООТВЕТСТВУЮЩИХ
 ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ "A";
 KE — СЧЕТЧИК ОШИБОК В ИСХОДНЫХ ДАННЫХ;
 B — ВЕКТОР КОЭФФИЦИЕНТОВ ЖЕЛАЕМОГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКО-
 ГО УРАВНЕНИЯ;
 KS, KSOM, KSR, KSZ, KSC — МАССИВЫ ЧИСЛА СЛАГАЕМЫХ СО-
 ОТВЕТСТВЕННО У ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ "A", ПОЛИНОМОВ
 2-ГО СОМНОЖИТЕЛЯ И ОЧЕРЕДНОГО СЛАГАЕМОГО ОПРЕДЕ-
 ЛИТЕЛЯ, КОЭФФИЦИЕНТОВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕ-
 НИЯ, ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ;
 A, DM, R, Z, RR, C — МАССИВЫ ЧИСЛОВЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ У
 СЛАГАЕМЫХ СООТВЕТСТВЕННО ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ "A",
 ПОЛИНОМОВ 2-ГО СОМНОЖИТЕЛЯ И ОЧЕРЕДНОГО СЛАГАЕМО-
 ГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ, КОЭФФИЦИЕНТОВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКО-
 ГО УРАВНЕНИЯ, ПРОМЕЖУТОЧНОГО РЕЗУЛЬТАТА, ЭЛЕМЕН-
 ТОВ МАТРИЦЫ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ,
 KSMV, LSMV, LSMVR, KBZ, LSRR, LSC — МАССИВЫ, ОПРЕ-
 ДЕЛЯЮЩИЕ ЧИСЛО СИМВОЛИЧЕСКИХ МНОЖИТЕЛЕЙ У СЛАГАЕ-
 МЫХ СООТВЕТСТВЕННО ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ "A", ПОЛИ-
 НОМОВ 2-ГО СОМНОЖИТЕЛЯ И ОЧЕРЕДНОГО СЛАГАЕМОГО
 ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ, КОЭФФИЦИЕНТОВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО
 УРАВНЕНИЯ, ПРОМЕЖУТОЧНОГО РЕЗУЛЬТАТА, ЭЛЕМЕНТОВ
 МАТРИЦЫ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ;
 KOD, KODDM, KODRZ, KODZ, KODRR, KODC — МАССИВЫ СИМВО-
 ЛИЧЕСКИХ МНОЖИТЕЛЕЙ У СЛАГАЕМЫХ СООТВЕТСТВЕННО
 ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ "A", ПОЛИНОМОВ 2-ГО СОМНОЖИ-
 ТЕЛЯ И ОЧЕРЕДНОГО СЛАГАЕМОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ, КОЭФ-
 ФИЦИЕНТОВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, ПРОМЕ-
 ЖУТОЧНОГО РЕЗУЛЬТАТА, ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ ЧАСТНЫХ
 ПРОИЗВОДНЫХ;
 INDEX — МАССИВ ИНДЕКСОВ, ПЕРЕСТАНОВКОЙ КОТОРЫХ ПРИ
 РАСКРЫТИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОЛУЧАЮТ 2-ЫЕ ИНДЕКСЫ У
 ПЕРЕМНОЖАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ "A";
 NF — ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК ИЗ N ЭЛЕМЕНТОВ,
 KNX — ЧИСЛО ВВЕДЕННЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ;
 LITER — МАССИВ СИМВОЛИЧЕСКИХ ИМЕН НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРА-
 МЕТРОВ СИСТЕМЫ;
 ФОРМИРУЕТСЯ В ПОРЯДКЕ ПОЯВЛЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРА-
 МЕТРОВ ПРИ ПОСТРОЧНОМ ПРОСМОТРЕ МАТРИЦЫ "A";
 FV — МАССИВ ЗНАЧЕНИЙ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ
 АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ;
 FD — МАССИВ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦЫ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ
 ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО
 ИСКОМЫМ ПАРАМЕТРАМ;


```

C   ВВОД ИСХОДНЫХ ДАННЫХ
C-----
C   ВВОД ПО ФОРМАТУ А4 ВИДА ВЫПОЛНЯЕМОЙ РАБОТЫ:
C   DET - РАСКРЫТИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ;
C   CHAR - ПОЛУЧЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ;
C   SINT - ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ЦЕПЕЙ.
C
      READ 1000, SIMVL4
      DO 10 JOB = 1,3
          IF (SIMVL4 .EQ. JCL(JOB)) GO TO 20
10  CONTINUE
      PRINT 1010, SIMVL4
      PRINT 1020
      GO TO 700
20  IF (JOB .EQ. 1) PRINT 1030
      IF (JOB .EQ. 2) PRINT 1040
      IF (JOB .EQ. 3) PRINT 1050
C   ВВОД ПО ФОРМАТУ I5 ПОРЯДКА МАТРИЦЫ "А"
      READ 1060, N
      PRINT 1070, N
      IF (N .LE. 10) GO TO 30
      KE = KE + 1
      PRINT 1080
30  PRINT 1090
C   ПОСТРОЧНЫЙ ВВОД ПО ФОРМАТУ 10I5 МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ
C   ЧИСЛО СЛАГАЕМЫХ У СООТВЕТСТВУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ "А"
      DO 50 I = 1, N
          READ 1060, (KS(I,J), J=1, N)
          PRINT 1060, (KS(I,J), J=1, N)
C   ПРОВЕРКА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ
      DO 50 IS = 1, N
          IF (KS(I,IS) .GT. 0) GO TO 40
          KE = KE + 1
          PRINT 1100, I, IS
40      IF (KS(I,IS) .LE. 5) GO TO 50
          KE = KE + 1
          PRINT 1110, I, IS
50  CONTINUE
      PRINT 1120
C   ПОСТРОЧНЫЙ ВВОД ПО ФОРМАТУ 8E10.3 МАТРИЦЫ, ЗАДАЮЩЕЙ
C   ЗНАЧЕНИЯ ПЕРВЫХ СЛАГАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ "А"
      DO 60 I = 1, N
          READ 1130, (A(I,J,1), J=1, N)
60      PRINT 1140, (A(I,J,1), J=1, N)
      PRINT 1150
C   ВВОД ВТОРЫХ И ПОСЛЕДУЮЩИХ СЛАГАЕМЫХ МАТРИЦЫ "А"
      DO 150 I = 1, N
          DO 150 J = 1, N
              IF (JOB .NE. 1) A(I,J,1) = -A(I,J,1)
              PA(I,J) = 1
              IN = KS(I,J)
              IF (IN .NE. 1) GO TO 70
C   ОПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ "А"
              IF (A(I,J,1) .EQ. 0. .AND. I .NE. J) IND(I,J)=0
              GO TO 140
70      PRINT 1160, I, J
          DO 130 M = 2, IN

```

```

C      ВВОД ПО ФОРМАТУ (I5,E10.3) ЧИСЛА СИМВОЛИЧЕСКИХ
C      МНОЖИТЕЛЕЙ И ЗНАЧЕНИЯ ЧИСЛОВОГО МНОЖИТЕЛЯ У СЛАГАЕМОГО
      READ 1170, IK, A(I,J,M)
      IF (IK .LE. 5) GO TO 80
      KE = KE + 1
      PRINT 1180, M, I, J
80      K = M - 1
      KSIMV(I,J,K) = IK
C      ВВОД ПО ФОРМАТУ 5A4 СИМВОЛИЧЕСКИХ МНОЖИТЕЛЕЙ СЛАГАЕМОГО
      READ 1000, (CODPK(L), L=1, IK)
C      ФОРМИРОВАНИЕ ВЕКТОРА НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ
      DO 120 L = 1, IK
      IF (KNX .EQ. 0) GO TO 110
      DO 100 I2 = 1, KNX
      IF (LITER(I2) .EQ. CODPK(L)) GO TO 120
100      CONTINUE
110      KNX = KNX + 1
      I2 = KNX
      LITER(KNX) = CODPK(L)
C      ЗАПИСЬ В МАССИВ СИМВОЛИЧЕСКИХ МНОЖИТЕЛЕЙ ИНДЕКСОВ
C      ЭЛЕМЕНТОВ ВЕКТОРА НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ
120      KOD(I,J,K,L) = I2
      PRINT 1190, A(I,J,M), (SUMN,CODPK(L),L=1,IK)
130      IF (JOB .NE. 1) A(I,J,M) = -A(I,J,M)
140      IF (JOB .EQ. 1) GO TO 150
      IF (I .EQ. J) PA(I,J) = 2
150 CONTINUE
      IF (JOB .NE. 3) GO TO 160
      IF (KNX .EQ. N) GO TO 160
      PRINT 1200, N, KNX, (LITER(L), L=1, KNX)
      KE = KE + 1
160 IF (KE .EQ. 0) GO TO 170
      PRINT 1210, KE
      GO TO 700
170 NF = 1
C      ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ПЕРЕСТАНОВОК ИЗ N ЭЛЕМЕНТОВ
      DO 180 I = 1, N
180      NF = NF * I
      PZ = N + 1
      IF (JOB .EQ. 1) PZ = 1
      DO 190 I = 1, PZ
      KSZ(I) = 1
190      Z(I,1) = 0.0
      ZN = +1
C-----
C      ЦИКЛ ПО ЧИСЛУ СЛАГАЕМЫХ В ВЫРАЖЕНИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ
C-----
C
      DO 510 IPER = 1, NF
C
C      ОПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕВЫХ СЛАГАЕМЫХ И
C      ИСКЛЮЧЕНИЕ ИХ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ
C
      DO 200 I = 1, N
      J = INDEX(I)
      IF (IND(I,J) .EQ. 0) GO TO 460
200      CONTINUE
      J = INDEX(1)

```

C ПЕРЕПИСЫВАНИЕ A(1,INDEX(1)) НА МЕСТО 2-ГО СОМНОЖИТЕЛЯ

C

C

```
IK = KS(1,J)
DO 220 I1 = 1, IK
  IF (I1 .EQ. 1) GO TO 220
  K1 = I1 - 1
  IN = KSIMV(1,J,K1)
  LSIMV(1,K1) = IN
  DO 210 I2 = 1, IN
    KODDM(K1,I2,1) = KOD(1,J,K1,I2)
210   DM(1,I1) = A(1,J,I1) * ZN
220   KSDM(1) = IK
    PD = PA(1,J)
    IF (PD .EQ. 1) GO TO 230
    KSDM(2) = 1
    DM(2,1) = ZN
```

C

C ЦИКЛ ПО ЧИСЛУ УМНОЖЕНИЙ В ВЫРАЖЕНИИ ДЛЯ КАЖДОГО
C СЛАГАЕМОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

C

C

```
230   DO 420 I = 2, N
      J = INDEX(I)
      KA = PA(I,J)
      PR = PD + KA - 1
      DO 240 II = 1, PR
        KSR(II) = 1
240   R(II,1) = 0.0
      KC = KS(I,J)
      DO 390 IA = 1, KA
        IF (IA .EQ. 2) KC = 1
        DO 390 K = 1, PD
          IR = IA + K - 1
          LDM = KSDM(K)
          IC = 0
          DO 340 IS = 1, KC
            DO 330 JS = 1, LDM
              IC = IC + 1
              IF (IA .NE. 2) GO TO 250
              RR(IC) = DM(K,JS)
              IF (RR(IC) .EQ. 0.0) GO TO 330
              IK = 0
              GO TO 290
```

C

C ПЕРЕМНОЖЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ

C

```
250   RR(IC) = A(I,J,IS) * DM(K,JS)
      IF (RR(IC) .NE. 0.) GO TO 260
      IF (A(I,J,IS) .EQ. 0.) GO TO 340
      IF (IC .NE. 1) IC = IC - 1
      GO TO 330
260   IF (IS .NE. 1) GO TO 270
      IK = 0
      GO TO 290
```

C

```

270      ISM = IS - 1
      IK = KSIMV(I,J,ISM)
      DO 280 I1 = 1, IK
280        KODRR(IC,I1) = KOD(I,J,ISM,I1)
290        IF (JS .NE. 1) GO TO 300
          IN = 0
          GO TO 320
300        JSM = JS - 1
          IN = LSMV(K,JSM)
          DO 310 I1 = 1, IN
310            KODRR(IC,IK+I1) = KODDM(JSM,I1,K)
320            LSRR(IC) = IK + IN
330      CONTINUE
340      CONTINUE

```

C

СЛОЖЕНИЕ "ЧИСТО" ЧИСЛОВЫХ СЛАГАЕМЫХ

```

      R(IR,1) = R(IR,1) + RR(1)
      IF (IC .EQ. 1) GO TO 390
      IF (IC .LE. 101) GO TO 350
      PRINT 1220
      GO TO 700
350      DO 380 II = 2, IC
          IK = KSR(IR) + II - 1
          IN = LSRR(II)
          IF (IN .LE. 100) GO TO 360
          PRINT 1230
          GO TO 700
360      K1 = IK - 1
          LSMVR(IR,K1) = IN
          DO 370 I2 = 1, IN
370            KODRZ(K1,I2,IR) = KODRR(II,I2)
380            R(IR,IK) = RR(II)
          KSR(IR) = IK
          IF (IK .LE. 101) GO TO 390
          PRINT 1220
          GO TO 700
390      CONTINUE

```

C

IF (I .EQ. N) GO TO 420

C

ЗАСЫЛАЕМ РЕЗУЛЬТАТ УМНОЖЕНИЯ НА МЕСТО 2-ГО СМНОЖИТЕЛЯ

C

C

```

      FD = FR
      DO 410 I3 = 1, FR
          IK = KSR(I3)
          KSDM(I3) = IK
          DO 410 I1 = 1, IK
              IF (I1 .EQ. 1) GO TO 410
              K1 = I1 - 1
              IN = LSMVR(I3,K1)
              LSIMV(I3,K1) = IN
              DO 400 I2 = 1, IN
400                KODDM(K1,I2,I3) = KODRZ(K1,I2,I3)
410            DM(I3,I1) = R(I3,I1)
      CONTINUE

```

C

C СУММИРОВАНИЕ ПОЛУЧЕННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ К ИТОГОВОЙ СУММЕ

C
C

```
DO 450 I=1, 'PR
  Z(I,1) = Z(I,1) + R(I,1)
  I3 = KSR(I)
  IF (I3 .EQ. 1) GO TO 450
    DO 440 II = 2, I3
      IS = II - 1
      IK = KSZ(I) + II - 1
      K1 = IK - 1
      IN = LSMVR(I,IS)
      KBZ(I,K1) = IN
    DO 430 I2 = 1, IN
      KODZ(K1,I2,I) = KODRZ(IS,I2,I)
    Z(I,IK) = R(I,II)
    KSZ(I) = KSZ(I) + I3 - 1
    IF (KSZ(I) .LE. 101) GO TO 450
    PRINT 1220
    GO TO 700
```

430

440

450 CONTINUE

C

C ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕСТАНОВОК ВТОРЫХ ИНДЕКСОВ

C
C

```
460 M = N
  K = 0
470 J = P(M) + D(M)
  P(M) = J
  IF (J .NE. M) GO TO 480
    D(M) = -1
    GO TO 490
480 IF (J .NE. 0) GO TO 500
  D(M) = 1
  K = K + 1
490 M = M - 1
  IF (M .EQ. 0) GO TO 510
  GO TO 470
500 J = J + K
  I = INDEX(J)
  K = J + 1
  INDEX(J) = INDEX(K)
  INDEX(K) = I
```

C ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАКА

ZN = -ZN

C

510 CONTINUE

C

C ПЕЧАТЬ РЕЗУЛЬТАТА

C
C

IF (JOB .EQ. 1) GO TO 520

LDM = N

PRINT 1240

GO TO 530

520 PRINT 1250

LDM = 1

```

530 DO 580 M = 1, LDM
      IF (JOB .EQ. 1) GO TO 540
      I = PZ - M
      PRINT 1260, M, Z(I,1)
      GO TO 550
540   I = 1
      PRINT 1140, Z(1,1)
550   IK = KSZ(I)
      IF (IK .EQ. 1) GO TO 580
      DO 570 J = 2, IK
        PRINT 1270, Z(I,J)
        JS = J - 1
        IN = KBZ(I,JS)
        DO 560 L = 1, IN
          I1 = KODZ(JS,L,I)
560         CODPK(L) = LITER(I1)
570         PRINT 1280, (SUMN, CODPK(L), L = 1, IN)
580 CONTINUE
C
      IF (JOB .NE. 3) GO TO 690
-----
C  ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ХА-
C  РАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПО ИСКОМЫМ ПАРАМЕТРАМ
C-----
C
      DO 610 I = 1, N
        IK = KSZ(I)
        IF (IK .EQ. 1) GO TO 610
        DO 600 I1 = 2, IK
          JS = I1 - 1
          IN = KBZ(I,JS)
          DO 600 I2 = 1, IN
            J = KODZ(JS,I2,I)
            KSC(I,J) = KSC(I,J) + 1
            ISM = KSC(I,J)
            C(I,J,ISM) = Z(I,I1)
            IF (IN .EQ. 1) GO TO 600
            IC = 0
            DO 590 I3 = 1, IN
              IF (I3 .EQ. I2) GO TO 590
              IC = IC + 1
              KODC(I,J,ISM,IC) = KODZ(JS,I3,I)
590             CONTINUE
              LSC(I,J,ISM) = IC
600           CONTINUE
610 CONTINUE
C-----
C  ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЖЕЛАЕМОГО
C  ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
C-----
      H(2) = (1.0, 0.0)
      E(2) = H(2)
      PD = 2
      PRINT 1290
C  ВВОД КОМПЛЕКСНОГО ЗНАЧЕНИЯ 1-ГО ЖЕЛАЕМОГО КОРНЯ
      READ 1130, E(1)
      PRINT 1140, E(1)
      E(1) = -E(1)

```

```

DO 650 I = 2, N
C   ВВОД КОМПЛЕКСНЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЛЕДУЮЩИХ ЖЕЛАЕМЫХ КОРНЕЙ
    READ 1130, H(1)
    PRINT 1140, H(1)
    H(1) = -H(1)
    PR = PD + 1
C
C   ПЕРЕМНОЖЕНИЕ ПОЛИНОМОВ ВИДА (S-SI), ГДЕ SI - I-Й КОРЕНЬ
    DO 620 J = 1, PR
620      G(J) = (0.0, 0.0)
    DO 630 J = 1, PD
        DO 630 K = 1, 2
630          G(J+K-1) = G(J+K-1) + E(J)*H(K)
    IF (I .EQ. N) GO TO 650
    PD = PR
    DO 640 L = 1, PR
640      E(L) = G(L)
650 CONTINUE
C   ВЫДЕЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧАСТЕЙ В КОМПЛЕКСНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ
C   КОЭФФИЦИЕНТОВ ЖЕЛАЕМОГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
    DO 660 I = 1, N
        CR = G(I)
660      E(I) = RE
    PRINT 1300
    DO 670 I = 1, N
        M = PZ - I
670      PRINT 1310, I, E(M)
C-----
C   РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
C-----
C
C   ВВОД НАЧАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ИСКОМЫХ ПАРАМЕТРОВ
    READ 1130, (X(I), I = 1, N)
    PRINT 1320, (LITER(I), X(I), I = 1, N)
C   ВВОД ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
    READ 1130, EPS
    PRINT 1330, EPS
C
C   ОБРАЩЕНИЕ К ПОДПРОГРАММЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ
C   УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НЬЮТОНА
C
    CALL DSNEN (X, N, FUN, EPS, 700, PD, FV, IER)
C
    IF (IER .EQ. 0) GO TO 680
    PRINT 1340, IER
    PRINT 1140, (X(I), I = 1, N)
    GO TO 690
C   ПЕЧАТЬ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ЦЕПЕЙ
680 PRINT 1350, (LITER(I), X(I), I = 1, N)
C
C   ФОРМАТЫ ВВОДА-ВЫВОДА
1000 FORMAT (20A4)
1010 FORMAT (1X,20A5)
1020 FORMAT (' ЗАДАНО НЕВЕРНОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ НАЗНАЧЕНИЕ')
1030 FORMAT (///6X,'РАСКРЫТИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ СО СМЕШАННЫМИ'/
F          6X,9(1H-),1X,12(1H-),' -- ',10(1H-)/
1          6X,'СИМВОЛЬНО-ЧИСЛОВЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ'/
2          11X,19(1H-),1X,10(1H-))

```

```

1040 FORMAT (///6X,'ПОЛУЧЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕ',
P      'НИЯ ПО'/6X,9(1H-),1X,19(1H-),1X,9(1H-),' --'/
1      6X,'МАТРИЦЕ СИСТЕМЫ С СИМВОЛЬНО-ЧИСЛОВЫМИ',
2      ' ЭЛЕМЕНТАМИ'/
3      6X,7(1H-),1X,7(1H-),' - ',19(1H-),1X,10(1H-))
1050 FORMAT (///6X,'ПРЯМОЙ МЕТОД СИНТЕЗА КОРРЕКЦИИ СИСТЕМ'
P      ', ' УПРАВЛЕНИЯ'/6X,6(1H-),1X,5(1H-),1X,7(1H-),
1      1X,9(1H-),1X,6(1H-),1X,10(1H-))
1060 FORMAT (16I5)
1070 FORMAT ('0 ПОРЯДОК МАТРИЦЫ "А" : N=',12)
1080 FORMAT (' ПОРЯДОК МАТРИЦЫ "А" БОЛЬШЕ 10')
1090 FORMAT (/6X,'ЧИСЛО СЛАГАЕМЫХ У ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ "А"')
1100 FORMAT (' НУЛЬ СЛАГАЕМЫХ У ЭЛЕМЕНТА A',2I2)
1110 FORMAT (' БОЛЬШЕ ПЯТИ СЛАГАЕМЫХ У ЭЛЕМЕНТА A',2I2)
1120 FORMAT ('0 1-ЫЕ СЛАГАЕМЫЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ "А"')
1130 FORMAT (8E10.3)
1140 FORMAT (1X,10G12.3)
1150 FORMAT ('0 2-ЫЕ И ПОСЛЕДУЮЩИЕ СЛАГАЕМЫЕ ЭЛЕМЕНТОВ'
P      ', ' МАТРИЦЫ "А"')
1160 FORMAT (' A',2I2,' =')
1170 FORMAT (15,E10.3)
1180 FORMAT (' БОЛЬШЕ ПЯТИ СИМВОЛИЧЕСКИХ МНОЖИТЕЛЕЙ У',I3,
P      ' СЛАГАЕМОГО ЭЛЕМЕНТА A',2I2)
1190 FORMAT (10X,'+ ('',G11.3,'')',10(A1,A4))
1200 FORMAT (' СТЕПЕНЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ : N='
P      ',I2,' НЕ РАВНА ЧИСЛУ ИСКОМЫХ ПАРАМЕТРОВ :',I2
1      /6X,'НЕИЗВЕСТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ СИСТЕМ'/(1X,20A5))
1210 FORMAT ('0 КОЛИЧЕСТВО ОШИБОК =',I3)
1220 FORMAT (' ЧИСЛО СЛАГАЕМЫХ ПРЕВЫШАЕТ 101')
1230 FORMAT (' ЧИСЛО СИМВОЛИЧЕСКИХ МНОЖИТЕЛЕЙ БОЛЬШЕ 10')
1240 FORMAT (///6X,'КОЭФФИЦИЕНТЫ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ',
P      ' УРАВНЕНИЯ',/6X,'НАЧИНАЯ С КОЭФФИЦИЕНТА ПРИ',
1      ' ЧЛЕНЕ В (N-1)-Я СТЕПЕНИ')
1250 FORMAT (///'0',10X,'ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ')
1260 FORMAT ('0 A',I2,' =',G13.3)
1270 FORMAT (10X,'+ ('',G11.3,'')')
1280 FORMAT ('+',24X,10(A1,A4))
1290 FORMAT ('0',5X,'ЖЕЛАЕМЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КОРНЕЙ'/
P      5X,'RE',8X,'IM')
1300 FORMAT ('0',5X,'КОЭФФИЦИЕНТЫ ЖЕЛАЕМОГО ',
P      ' ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ')
1310 FORMAT ('0 B',I2,' =',G13.3)
1320 FORMAT ('0',5X,'НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ'/
P      (6X,A4,' =',G12.4))
1330 FORMAT (/6X,'ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ'
P      ', ' УРАВНЕНИЙ'/1X,G12.4)
1340 FORMAT ('0 НЕ РЕШЕНА СИСТЕМА НЕЛИНЕЙНЫХ ',
P      ' АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ IER=',I2)
1350 FORMAT (///6X,'ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ',\
P      ' ЦЕПЕЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ'/6X,'ЖЕЛАЕМОМ ЗНАЧЕ',
1      ' НИЯМ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ'
2      ' /( '0',5X,A4,' =',G12.4))
1360 FORMAT ('0 ЗАДАНИЕ СНИМАЕТСЯ')

690 STOP
700 PRINT 1360
GO TO 690
END

```


SUBROUTINE FUN (FD, FV, X)

 С ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (МАССИВ FV) И МАТРИЦЫ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ (МАССИВ FD) ОТ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ИСКОМЫМ ПАРАМЕТРАМ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ЦЕПЕЙ ПРИ ЗАДААННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ВЕКТОРА НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ (МАССИВ X).
 С МАССИВЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ, ПЕРЕДАЮТСЯ ЧЕРЕЗ ОБЩУЮ ОБЛАСТЬ "W"
 С*****

С
 COMMON /W/ B, Z, C, N, KSC, LSC, KSZ, KBZ, KODZ, KODC
 REAL Z(11,101), C(10,10,101)
 REAL*8 FD(N,N), FV(N), X(N), B(10), S
 INTEGER*2 KBZ(11,100), KODZ(100,10,11), KSC(10,10),
 F KSZ(11), LSC(10,10,100), KODC(10,10,100,9)
 DO 850 I = 1, N
 FV(I) = Z(I,1) - B(I)
 IK = KSZ(I)
 IF (IK .EQ. 1) GO TO 820
 DO 810 J = 2, IK
 S = Z(I,J)
 JS = J-1
 IN = KBZ(I,JS)
 DO 800 I1 = 1, IN
 I2 = KODZ(JS,I1,1)
 800 S = S * X(I2)
 810 FV(I) = FV(I) + S
 820 DO 850 J = 1, N
 FD(I,J) = 0.0
 IK = KSC(I,J)
 IF (IK .EQ. 0) GO TO 850
 DO 840 I1 = 1, IK
 S = C(I,J,I1)
 IN = LSC(I,J,I1)
 IF (IN .EQ. 0) GO TO 840
 DO 830 I2 = 1, IN
 L = KODC(I,J,I1,I2)
 830 S = S * X(L)
 840 FD(I,J) = FD(I,J) + S
 850 CONTINUE
 RETURN
 END

BLOCK DATA

С*****
 С ПОДПРОГРАММА ДАННЫХ - ОБНУЛЕНИЕ РАБОЧИХ МАССИВОВ
 С*****
 COMMON /W/ B, Z, C, N, KSC, LSC, KSZ, KBZ, KODZ, KODC
 REAL*8 B(10)
 REAL Z(11,101), C(10,10,101)/10100*0.0/
 INTEGER*2 KSC(10,10)/100*0/, LSC(10,10,100)/10000*0/,
 F KSZ(11), KBZ(11,100), KODZ(100,10,11),
 1 KODC(10,10,100,9)
 END

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ ПРИМЕРА § 7.4

STNT

4			
2	1	2	2
1	1	1	1
1	1	1	1
2	2	1	2

0 0	0 0	0.0	0.0
0.006	-0.6576	0.0	0.0
0 0	1 0	0 0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0

1 -1.0

ZTY

2 -26.0

KU ZTY

1 -26.0

ZTY

2 .006

KOCZTCC

2 - 6576

KOCZTCC

1 -1.0

ZTDC

-5. -7.8

-5. 7.8

-8.

-20.

1

.001

1.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ПРИМЕРА § 7.4

ПРЯМОЙ МЕТОД СИНТЕЗА КОРРЕКЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

ПОРЯДОК МАТРИЦЫ "А" : $N = 4$

ЧИСЛО СЛАГАЕМЫХ У ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ "А"

2	1	2	2
1	1	1	1
1	1	1	1
2	2	1	2

1-ЫЕ СЛАГАЕМЫЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ "А"

0.0	0.0	0.0	0.0
0.600E-02	-0.654	0.0	0.0
0.0	1.00	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0

2-ЫЕ И ПОСЛЕДУЮЩИЕ СЛАГАЕМЫЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ "А"

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= + (-1.00) * ZTU \\
 A_{13} &= + (-26.0) * KU * ZTU \\
 A_{14} &= + (-26.0) * ZTU \\
 A_{41} &= + (0.600E-02) * KOC * ZTOC \\
 A_{42} &= + (-0.654) * KOC * ZTOC \\
 A_{44} &= + (-1.00) * ZTOC
 \end{aligned}$$

КОЭФФИЦИЕНТЫ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ,
НАЧИНАЯ С КОЭФФИЦИЕНТА ПРИ ЧЛЕНЕ В $(N-1)$ -Й СТЕПЕНИ

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 0.654 \\
 &+ (1.00) * ZTOC \\
 &+ (1.00) * ZTU \\
 A_2 &= 0.0 \\
 &+ (0.654) * ZTOC \\
 &+ (1.00) * ZTOC * ZTU \\
 &+ (0.654) * ZTU \\
 &+ (0.156) * KOC * ZTOC * ZTU \\
 A_3 &= 0.0 \\
 &+ (0.654) * ZTOC * ZTU \\
 &+ (0.156) * KU * ZTU \\
 &+ (-0.102) * KOC * ZTOC * ZTU \\
 &+ (0.102) * KOC * ZTOC * ZTU \\
 A_4 &= 0.0 \\
 &+ (0.156) * ZTOC * KU * ZTU
 \end{aligned}$$

ЖЕЛАЕМЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КОРНЕЙ

RE IM

-5.00	-7.80
-5.00	7.80
-8.00	0.0
-20.0	0.0

КОЭФФИЦИЕНТЫ ЖЕЛАЕМОГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

B 1 = 38.0

B 2 = 526.

B 3 = 0.400D 04

B 4 = 0.137D 05

НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ

ZTU = 1.000

KU = 1.000

KOC = 1.000

ZTOS = 1.000

ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

0.1000E-02

ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ЦЕПЕЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ ЖЕЛАЕМЫМ ЗНАЧЕНИЯМ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

ZTU = 33.85

KU = 743.5

KOC = 20.74

ZTOS = 3.498

1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования.— М.: Наука, 1975.
2. Бесекерский В. А. Цифровые автоматические системы.— М.: Наука, 1976.
3. Болнокин В. Е., Чинаев П. И. Анализ и синтез систем автоматического управления на ЭВМ.— М.: Радио и связь, 1986.
4. Вавилов А. А., Имаев Д. Х. Машинные методы расчета систем управления.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1984.
5. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем.— М.: Энергия, 1980.
6. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления. Особые линейные и нелинейные системы.— М.: Энергия, 1984.
7. Воронов А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость.— М.: Наука, 1979.
8. Динамика систем управления ракет с бортовыми вычислительными машинами/Под ред. М. С. Хитрика, С. М. Федорова.— М.: Машиностроение, 1976.
9. Задачник по теории автоматического управления/Под ред. А. С. Шаталова.— М.: Энергия, 1979.
10. Иващенко Н. Н. Автоматическое регулирование.— М.: Машиностроение, 1978.
11. Кочетков В. Т., Половко А. М., Пономарев В. М. Теория систем телеуправления и самонаведения ракет.— М.: Наука, 1964.
12. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики.— М.: Госэнергоиздат, 1962.
13. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем.— М.: Наука, 1987.
14. Кулешов В. С., Лакота Н. А. Динамика систем управления манипуляторами.— М.: Энергия, 1974.
15. Курош А. Г. Курс высшей алгебры.— М.: Наука, 1975.
16. Макаров И. М., Менский Б. М. Линейные автоматические системы.— М.: Машиностроение, 1982.
17. Математические основы теории автоматического регулирования. Т. 1, 2/Под ред. Б. К. Чемоданова.— М.: Высшая школа, 1977.
18. Мееров М. В. Исследование и оптимизация многосвязных систем управления.— М.: Наука, 1986.
19. Медведев В. С., Лесков А. Г., Ющенко А. С. Системы управления манипуляционных роботов.— М.: Наука, 1978.
20. Михайлов Ф. А. Теория и методы исследования нестационарных линейных систем.— М.: Наука, 1986.

21. Морозовский В. Т. Многосвязные системы автоматического регулирования.— М.: Энергия, 1970.
22. Основы автоматического регулирования и управления/Под ред. В. М. Пономарева и А. П. Литвинова.— М.: Высшая школа, 1974.
23. Основы проектирования следящих систем/Под ред. Н. А. Лакоты.— М.: Машиностроение, 1978.
24. Основы теории автоматического управления/Под ред. Н. Б. Судзиловского.— М.: Машиностроение, 1985.
25. Попов Е. П. Динамика систем автоматического регулирования.— М.: Гостехиздат, 1954.
26. Попов Е. П. Автоматическое регулирование и управление.— М.: Наука, 1966.
27. Попов Е. П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления.— М.: Наука, 1978.
28. Проектирование и расчет динамических систем/Под ред. В. А. Климова.— Л.: Машиностроение, 1974.
29. Проектирование следящих систем двустороннего действия/Под ред. В. С. Кулепова.— М.: Машиностроение, 1979.
30. Проектирование следящих систем с помощью ЭВМ/Под ред. В. С. Медведева.— М.: Машиностроение, 1979.
31. Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем управления.— М.: Наука, 1981.
32. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления/Под ред. В. А. Бесекерского.— М.: Наука, 1978.
33. Солодов А. В., Петров Ф. С. Линейные автоматические системы с переменными параметрами.— М.: Наука, 1971.
34. Солодовников В. В., Бородин Ю. П., Иоаннисян А. Б. Частотные методы анализа и синтеза нестационарных линейных систем.— М.: Советское радио, 1972.
35. Солодовников В. В., Плотников В. Н., Яковлев А. В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования.— М.: Машиностроение, 1985.
36. Теория автоматического регулирования/Под ред. В. В. Солодовникова.— Т. 1, 2.— М.: Машиностроение, 1967.
37. Теория автоматического управления/Под ред. А. В. Нетушила.— М.: Высшая школа, 1976.
38. Томович Р., Вукобратович М. Общая теория чувствительности.— М.: Советское радио, 1972.
39. Топчиев Ю. И., Цыпляков А. П. Задачник по теории автоматического регулирования.— М.: Машиностроение, 1977.
40. Удерман Э. Г. Метод корневого годографа в теории автоматических систем.— М.: Наука, 1972.
41. Федоров С. М., Литвинов А. П. Автоматические системы с цифровыми управляющими машинами.— М.: Энергия, 1965.
42. Фельдбаум А. А., Бутковский А. Г. Методы теории автоматического управления.— М.: Наука, 1971.
43. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем.— М.: Наука, 1977.
44. Черноруцкий Г. С., Сибрин А. П., Жабреев В. С. Следящие системы автоматических манипуляторов.— М.: Наука, 1987.
45. Шаталов А. С., Барковский В. В. и др. Методы синтеза систем управления на ЦВМ.— М.: Машиностроение, 1977.